Corrigé de l'Epreuve E_1 du Baccalauréat 2010

Certains résultats sont donnés à titre indicatif il revient aux correcteurs d'entrer dans les détails lors des concertations afin de mieux apprécier les démonstrations des élèves.

Exercice 1 :

On considère le tableau ci-dessus indiquant les résultats d'une étude sur le nombre d'années x en exercice des ouvriers d'une entreprise et de leur salaire y en milliers de francs.

Notons x_i les modalités de x et n_i l'effectif de x_i, avec $1 \leq i \leq 6$.

Et notons y_j les modalités de y et n_j l'effectif de y_j, avec $1 \leq j \leq 4$. Soit N l'effectif total.

x / Y	2	6	10	14	18	22	n_j
75	a	5	0	0	0	0	a+5
125	0	7	1	0	2	0	10
175	2	0	9	8	15	4	38
225	0	1	0	3	b	1	b+5
n_i	a+2	13	10	11	b+17	5	N= a+b+58

1) Déterminons a et b pour que $\overline{x} = \frac{596}{59}$ et $\overline{y} = \frac{8450}{59}$.

On sait que $\overline{x} = \frac{\sum_1^6 n_i x_i}{N}$ et $\overline{y} = \frac{\sum_1^4 n_j y_j}{N}$

Alors $\overline{x} = \frac{2(a+2)+(6\times13)+(10\times10)+(14\times11)+18(b+17)+(22\times5)}{a+b+58}$ et

$\overline{y} = \frac{75(a+5)+(10\times125)+(38\times175)+225(b+5)}{a+b+58}$

Or $\overline{x} = \frac{596}{59}$ et $\overline{y} = \frac{8450}{59}$

D'où $\frac{2(a+2)+(6\times13)+(10\times10)+(14\times11)+18(b+17)+(22\times5)}{a+b+58} = \frac{596}{59}$ et

$\frac{75(a+5)+(10\times125)+(38\times175)+225(b+5)}{a+b+58} = \frac{8450}{59}$.

On obtient ainsi le système suivant :

$$\begin{cases} 239a - 233b = 4900 \\ 161a - 193b = 2580 \end{cases}$$

D'où a =40 et b=20.

2) On suppose que a =40 et b=20 dans la suite. Et en associant à chaque valeur x_i la moyenne m_i de la série conditionnelle (y/x=x_i) ; on a obtenu le tableau suivant :

x	2	6	10	14	18	22
m	80	113	170	189	199	185

a) Calculons le coefficient de corrélation linéaire

Déterminons d'abord les moyennes $\bar{x}$ et $\bar{m}$, les variances V_x et V_y, les écarts-types σ_x et σ_y, la covariance de x et y. Notons que la série statistique double (x,m) est injective.

Ainsi on a $\bar{x} = \frac{\sum_1^6 x_i}{N}$, $\bar{m} = \frac{\sum_1^6 m_i}{N}$, $V_x = \frac{\sum_1^6 x_i^2}{N} - \bar{x}^2$, $V_m = \frac{\sum_1^6 m_i^2}{N} - \bar{m}^2$, $\sigma_x = \sqrt{V_x}$, $\sigma_m = \sqrt{V_m}$ et cov(x,m)$= \frac{\sum_1^6 x_i m_i}{N}$ - $\bar{x}\bar{m}$

D'où $\bar{x} = 12$, $\bar{m} = 156$, $V_x \approx 46.66$, $V_m \approx 1933.33$, $\sigma_x \approx 6.83$, $\sigma_m \approx 43.96$ et cov(x,m) ≈ 267.33.

Calculons maintenant le coefficient de corrélation linéaire r.

On sait que $r = \frac{cov(x,m)}{\sigma_x \sigma_m}$ d'où $r \approx 0.89$.

Puisque r est proche de 1, il y a alors une forte corrélation entre x et m.

b) La droite de régression de m en x, notée $D_{m/x}$, a pour équation

m=a x+b avec $a = \frac{cov(x,m)}{V_x}$ et $b = \bar{m} - a\bar{x}$.

D'où $D_{m/x}$: m= 5,73 x+87,25.

c) Si x=30 alors m≈259.128, d'où le salaire moyen d'un ouvrier ayant 30 ans d'ancienneté est sensiblement égal à 259130F.

<u>Exercice 2</u> :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$cm.

1)

a) Résolvons dans C l'équation $z^3 - 1 = 0$.

On sait que $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

alors $z^3 - 1 = 0$ si et seulement si $(z-1)(z^2 + z + 1) = 0$

D'où l'équation admet trois solutions données sous formes algébriques $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, d'où l'ensemble des solutions S est :

$$S = \left\{1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

Donnons les formes trigonométriques de ces solutions :

$z_1 = \cos 0 + i\sin 0$, $z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$ et $z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

b) Résolvons l'équation $z^3 = 8$ sachant que $2^3 = 8$.

$z^3 = 8$ est équivalente à $\left(\frac{z}{2}\right)^3 = 1$ ce qui implique d'après 1)a) que

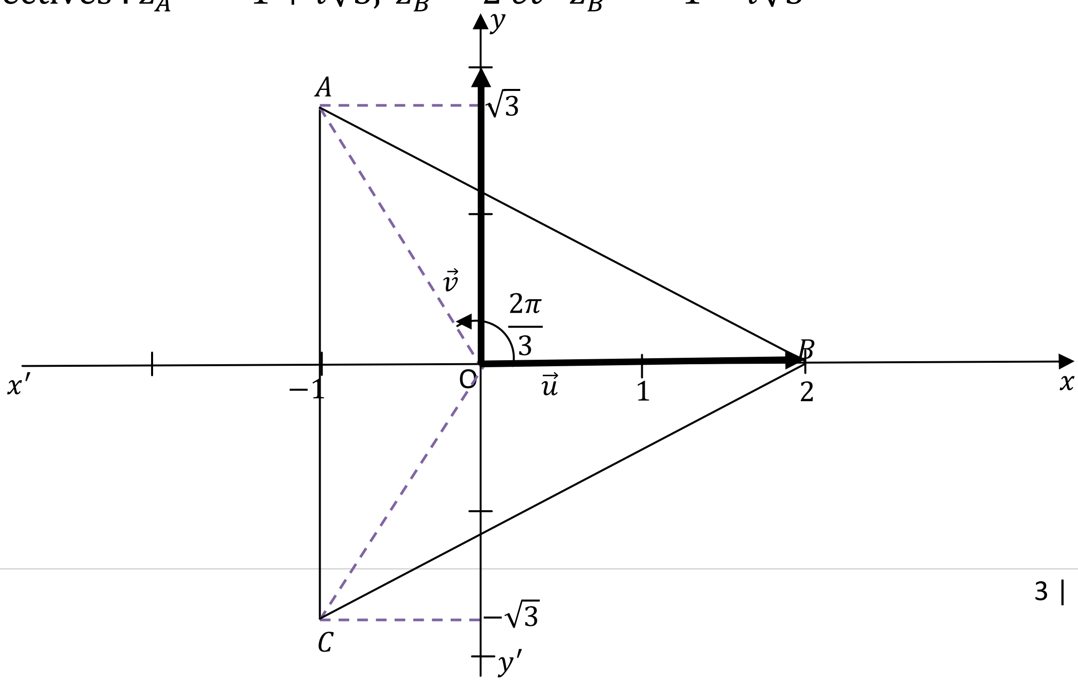
$$\frac{z}{2} = 1 \text{ ou } \frac{z}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{z}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

D'où $z = 2$ ou $z = -1 - i\sqrt{3}$ ou $z = -1 + i\sqrt{3}$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = 8$ est

$S_1 = \{2\,;\, -1 - i\sqrt{3}\,;\, -1 + i\sqrt{3}\}$.

2)

a) Plaçons les points dans le repère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2\ et\ \ z_B = -1 - i\sqrt{3}$



b) Calculons le modulons et un argument de $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

$\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, d'où $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = 1\right|$ et arg $(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}) = -\frac{\pi}{3}$.

c) $\left|\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right| = 1$ et arg $(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}) = -\frac{\pi}{3}$ impliquent que AB=CB et

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$, d'où le triangle ABC est équilatéral.

2)

a) Soit f la transformation qui associe à tout point M(z) le point

M'(z') tel que $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$.

Déterminons l'ensemble des points invariants par f.

Soit Ω (z_0) tel que f(Ω)= Ω, alors $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_0$ ce qui implique que $z_0 = 0$.

D'où f admet comme point invariant O.

Ainsi puisque $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z$ alors $z' - z_0 = e^{i\frac{2\pi}{3}}(z - z_0)$ ce qui implique que pour tout point z différent de z_0 on a $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

D'où $\left|\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right| = 1$ et arg $(\frac{z' - z_0}{z - z_0}) = C$.

Ceci est équivalent à : $\begin{cases} OM' = OM \\ (OM, OM') = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

Donc M' est l'image de M par une rotation. La rotation a pour centre O et pour angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit A' est l'image de A par f alors $z_{A'} = e^{i\frac{2\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

D'où $z_{A'} = z_C$ ou $A' = C$.

De même f$(C) = B$.

c) f$(A) = C$ et f$(C) = B$ on en déduit donc que l'image de la droite (AC) est la droite (BC) car l'image d'une droite par une rotation est une droite et que B et C appartiennent à la droite image.

<u>Exercice 3</u> :

On dispose d'un tiroir qui contient 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges, soit au total vingt chaussures. Toutes les paires sont de modèles différents.

1) On tire 2 chaussures au hasard.

Soit Ω l'univers alors card (Ω)=C_{20}^{2}=190.

a) Soit l'événement A : « tirer deux chaussures de la même

couleur », alors l'événement A est « tirer deux chaussures noires ou deux chaussures vertes ou deux chaussures rouges »

D'où p (A)= $\frac{C_{10}^{2}+C_{6}^{2}+C_{4}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{66}{190}\approx 0{,}35.$

b) Soit l'événement B : « tirer un pied droit et un pied gauche »

Puisque dans le tiroir il y a dix pieds gauches et dix pieds droits alors

p (B)= $\frac{C_{10}^{1}\times C_{10}^{1}}{C_{20}^{2}}=\frac{100}{190}\approx 0{,}52.$

c) Soit l'événement C : « tirer les deux chaussures d'un même

modèle ».

Puisque toutes les paires sont de modèles différents alors il y a dix modèles. On choisit un modèle parmi les dix et prend les deux chaussures du modèle.

Donc p (C)= $\frac{C_{10}^{1}\times C_{2}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{1}{19}\approx 0{,}05.$

2) Le tiroir ne contient maintenant qu'une paire de chaussures

noires et une paire de chaussures rouges. On effectue un tirage successif et sans remise d'une chaussure du tiroir jusqu'à ce qu'il soit vide.

Soit la variable aléatoire X égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Puisque X est le rang d'apparition de la deuxième chaussure noire

alors une ***première chaussure noire est déjà apparue*** donc la deuxième noire peut sortir au deuxième tirage ou au 3ème tirage ou au 4ème et il ne peut pas y avoir plus de quatre tirage car il n'y a que deux paires dans le tiroir.

D'où X prend les valeurs 2, 3 ou 4.

Soit Ω l'univers alors card (Ω)=4!

b) (X=2) c'est obtenir dans cet ordre noire, noire, rouge, rouge.

Alors p (X=2)=$\frac{2\times1\times2\times1}{24}=\frac{1}{6}$.

(X=3) c'est obtenir dans cet ordre noire, rouge, noire, rouge ou rouge, noire, noire, rouge

Alors p (X=3) $=\frac{2(2\times2\times1\times1)}{24}=\frac{1}{3}$.

(X=4) c'est obtenir dans cet ordre noire, rouge, rouge, noire ou rouge, noire, rouge, noire ou rouge, rouge, noire, noire

Alors p (X=4)=$\frac{2(2\times2\times1\times1)+(2\times1\times2\times1)}{24}=\frac{1}{2}$.

c) Soit E(x) l'espérance mathématiques de X, alors

$\mathrm{E(x)} = \sum_1^3 \mathrm{a_i p(X = a_i)} = (2 \times \frac{1}{6}) + \left(3 \times \frac{1}{3}\right) + \left(4 \times \frac{1}{2}\right) = \frac{10}{3}$

Sa V(X) variance est :

$$\mathrm{V(X)} = \sum_1^3 {a_i}^2 \mathrm{p(X = a_i)} - (\mathrm{E(x)})^2 = \left(4 \times \frac{1}{6}\right) + \left(9 \times \frac{1}{3}\right) + \left(16 \times \frac{1}{2}\right) - \frac{10}{3}^2$$
$$= \frac{5}{9} \approx 0,55$$

Son écart type σ_X est $\sqrt{V(X)}$, alors

$$\sigma_X = \approx 0,74$$

<u>**Problème :**</u>

<u>**Partie A**</u> :

1) Etudions sur IR le signe de $4e^{2x} - 5e^x + 1$.

Posons Y=e^x, considérons alors $4y^2 - 5y + 1$.

Le trinôme $4y^2 - 5y + 1 = 0$ admet deux racines $y_1 = \frac{1}{4}$ et $y_2 = 1$, d'où

$4y^2 - 5y + 1 = 4\left(y - \frac{1}{4}\right)(y - 1)$ ou encore

$4e^{2x} - 5e^x + 1 = 4\left(e^x - \frac{1}{4}\right)(e^x - 1)$ avec $x_1 = -2ln2\ et\ x_2 = 0$ ses racines.

Son tableau de signe est :

x	$-\infty$		$-2ln2$		0		$+\infty$
$e^x-\frac{1}{4}$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1				$-$	0	$+$	
$4e^{2x}-5e^x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où $4e^{2x}-5e^x+1\geq 0 \ si \ x\in]-\infty\,;-2ln2]\cup[0;+\infty[$ et

$4e^{2x}-5e^x+1<0 \ si \ x\in]-2ln2\,;0[$.

2) Soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=lnx-2\sqrt{x}+2$.

a)

- <u>Domaine de définition de φ</u>

φ est définie si et seulement si $x>0$ d'où le domaine de définition D_φ de φ est : $D_\varphi=]0\,;+\infty[$

- <u>Limites de φ aux bornes de D_φ</u>

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=-\infty \ et \ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-2+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)=-\infty$$

b) Etudions les variations de φ

$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{x}$, pour tout $x>0$.

D'où $\varphi'(x)=0 \ si \ x=1$,

$\varphi'(x)>0 \ si \ x\in]0\,;1[$ et

$\varphi'(x)<0 \ si \ x\in]1\,;+\infty[$

Dressons le tableau de variations de φ

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

c) D'après le tableau de variations $\varphi(x)$ admet un maximum en 1 est sa valeur maximale est 0.

D'où pour tout $x\in D_\varphi$, $\varphi(x)\leq 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{e^x}{2e^x-1} & si\ x\leq 0 \\ 1-x+\sqrt{x}lnx & si\ x>0 \end{cases}$$

($\mathscr{C}_f$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 2cm.

1)

a) Déterminons D_f le domaine de définition de f.

- Sur $]-\infty;0]$ $f(x)=\ x+\frac{e^x}{2e^x-1}$ est définie si et seulement si

$2e^x-1\neq 0$ c'est-à-dire $x\neq -ln2$.

Donc sur $]-\infty;0]$ f est définie si $x\in]-\infty;-ln2[\cup]-ln2\ ;0]$. (1)

- Sur $]0;+\infty]$ $f(x)=1-x+\sqrt{x}lnx$ est partout définie (2)

(1) et (2) impliquent que $D_f=]-\infty;-ln2[\cup]-ln2\ ;+\infty[$.

b) Calculons les limites aux bornes de D_f.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x+\frac{e^x}{2e^x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-ln2^-}f(x)=\lim_{x\to-ln2}x+\frac{e^x}{2e^x-1}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-ln2^+}f(x)=\lim_{x\to-ln2}x+\frac{e^x}{2e^x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-x+\sqrt{x}lnx=\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{1}{x}-1+\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)=-\infty$$

<u>Branches infinies</u> :

- $\lim_{x\to-ln2}f(x)=\lim\limits_{x\to-ln2}x+\frac{e^x}{2e^x-1}=\infty$ alors la droite d'équation $x=-ln2$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.
- On a $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ calculons alors $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\frac{e^x}{2e^x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{\frac{e^x}{2e^x-1}}{x}=1$ (3)

Calculons $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{e^x}{2e^x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2e^x-1} = 0 \qquad (4)$$

<u>Conclusion</u> : (3) et (4) impliquent que la droite ($\mathscr{D}_1$) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

- De même on a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, calculons alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x+\sqrt{x}lnx}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 1 + \frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -1 \qquad (5)$$

Calculons $\lim_{x\to+\infty} f(x) + x$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim_{x\to+\infty} 1 + \sqrt{x}lnx = +\infty \qquad (6)$$

<u>Conclusion</u> : (5) et (6) impliquent que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une branche infinie de direction asymptotique la droite ($\mathscr{D}_2$) d'équation $y = -x$ au voisinage de $+\infty$.

c) Position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à ($\mathscr{D}_1$) au voisinage de $-\infty$.

Au voisinage de $-\infty$: $f(x) - x > 0$ si $\frac{e^x}{2e^x-1} > 0$ c'est-à-dire $x \in]-ln2\,;0]$

Et $f(x) - x < 0$ si $x \in]-\infty\,; -ln2[$.

D'où la courbe $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ($\mathscr{D}_1$) au voisinage de $-\infty$.

2)

a) Etudions la continuité de f en 0.

On a d'une part $f(0) = 1$, d' autre part $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} x + \frac{e^x}{2e^x-1} = 1$

et $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} 1 - x + 2\sqrt{x}ln\sqrt{x} = 1$

d'où $\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 1$. Donc f est continue en 0.

b) Etudions la dérivabilité de f en 0 et interprétons graphiquement les résultats.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+\dfrac{e^x}{2e^x-1}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(2e^x-1)+e^x-(2e^x-1)}{x(2e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(2e^x-1)-e^x+1}{x(2e^x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 0^-}1-\frac{e^x-1}{x(2e^x-1)}=\lim_{x\to 0^-}1-\frac{\dfrac{e^x-1}{x}}{2e^x-1}=0$$

D'où f est dérivable à gauche de 0 et son nombre dérivé à gauche de 0, $f_g'(0)$, est $f_g'(0)=0$. La courbe représentative de f, ($\mathscr{C}_f$),admet une tangente horizontale à gauche du point d'abscisse 0.

-De même

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-x+\sqrt{x}lnx-1}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x+\sqrt{x}lnx}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}-1+\frac{2ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=-\infty$$

D'où f n'est pas dérivable à droite de 0. La courbe représentative de f,

($\mathscr{C}_f$),admet une tangente verticale à droite du point d'abscisse 0.

3) Calculons la dérivée de

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{4e^{2x}-5e^x+1}{(2e^x-1)^2} & si\ x\in\,]-\infty;-ln2[\cup]-ln2\,;0] \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(lnx-2\sqrt{x}+2\right) & si\ x\in\,]0;+\infty[\end{cases}$$

<u>Signe de la dérivée</u> :

Sur $]-\infty;-ln2[\cup]-ln2\,;0]$, $f'(x)$ a le même signe que $4e^{2x}-5e^x+1$

Et sur $]0;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $lnx-2\sqrt{x}+2$

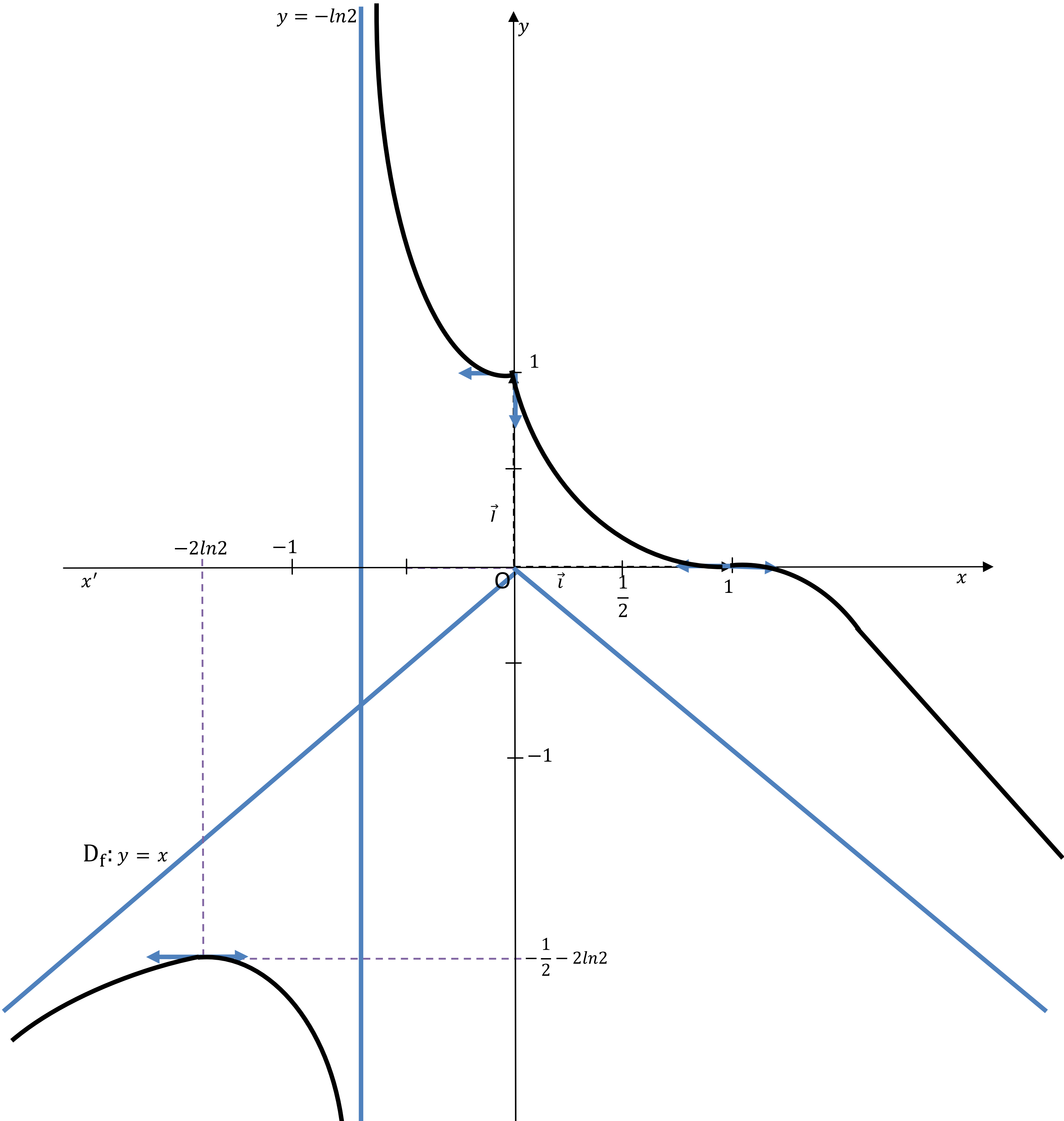
Donc d'après la partie A, $f'(x)\le 0\ [-2ln2;-ln2[\cup]-ln2\,;+\infty[$ et

$f'(x)\ge 0$ sur $]-\infty\,;-2ln2]$

<u>Tableau de variations de f</u> :

x	$-\infty$		$-2ln2$		$-ln2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	$0 \;\|\|\; -\infty$	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}-2ln2$	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4) Construction de la courbe, des asymptotes et des tangentes



$y = -ln2$
y
1
$\vec{j}$
$-2ln2$
-1
x'
O
$\vec{i}$
$\frac{1}{2}$
1
x
-1
$D_f: y = x$
$-\frac{1}{2} - 2ln2$
y'

5) Calculons l’aire A, en cm², du domaine du plan délimité par la droite d’équation $y = x$, la courbe et les droites d’équations $x = -ln8$ et $x = -\ln 4$.

$$A = \int_{-ln8}^{-ln4} \left(x - x - \frac{e^x}{2e^x - 1} \right) dx \times 4cm^2$$

$$A = \left[-\frac{1}{2} ln|2e^x - 1| \right]_{-ln8}^{-ln4} \times 4cm^2$$

$$A = 2\ln\frac{3}{2}\,\mathrm{cm}^2$$

FIN.