

# Concours Général Sénégalais 99 : Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée : 6 heures

## Introduction

### Problème 1

A)

$$g_\alpha : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$$

$g_\alpha$  est  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour  $x > 0$ ,  $g'_\alpha(x) = -\alpha x^{-\alpha-1} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$ .

On a donc le tableau :

|                |           |           |
|----------------|-----------|-----------|
| $x$            | 0         | $+\infty$ |
| $g'_\alpha(x)$ | -         |           |
| $g_\alpha(x)$  | $+\infty$ | 0         |

2)

Soit  $n \geq 1$ . Pour  $n \leq x \leq n+1$ ,  $g_\alpha$  étant décroissante,  $g_\alpha(n+1) \leq g_\alpha(x) \leq g_\alpha(n)$

$$\int_n^{n+1} g_\alpha(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} g_\alpha(x) dx \leq \int_n^{n+1} g_\alpha(n) dx \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

Pour  $n \geq 2$  : En sommant les inégalités  $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$   
 $k = 1, 2, \dots, n-1$ . On obtient par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$w_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq w_n - \frac{1}{n^\alpha}.$$

donc

$$\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \leq w_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

3 - a)

$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ , ( $n \geq 1$ ) donc  $(w_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.

3 - b)

- Si  $\alpha = 1$  :  $I_n = \int_1^n \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^n = \ln n$ .

– Si  $\alpha \neq 1$  : une primitive de  $x \mapsto x^{-\alpha}$  est  $\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}$

$$I_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^n$$

$$I_n = \frac{1}{1-\alpha} (n^{1-\alpha} - 1)$$

– Si  $\alpha < 1, 1 - \alpha > 0, n^{1-\alpha} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

$$I_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

– Si  $\alpha = 1, I_n = \ln n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

– Si  $\alpha > 1, I_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$

c)

Si  $0 < \alpha \leq 1$  : Pour  $n \geq 2, w_n \geq I_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$  donc  $w_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Si  $\alpha > 1 : I_n \leq w_n \leq 1 + I_n, \forall n \geq 2$ .

$I_n \nearrow \frac{1}{\alpha-1}$  donc  $w_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} \forall n \geq 2$ .

$(w_n)$  est croissante et majorée donc converge vers un réel  $l$ . Comme  $I_n \leq w_n \leq 1 + I_n, \forall n \geq 2$ , en passant à la limite dans l'inégalité

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq l \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

**B)**

$S_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$  pour  $n \geq 1, t_n = \ln S_n$  (qui est bien définie car  $S_n > 0$  pour  $n \geq 1$ ).

1)

Soit  $n \geq 2$ .

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{S_{n-1}} &= \frac{n!e^n}{(n-1)!e^{n-1}} \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= ne \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= ne \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{n * n^{n-\frac{1}{2}}} \\ &= e \left( \frac{n-1}{n} \right)^{n-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En prenant le logarithme

$$t_n - t_{n-1} = 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

2)

$$h : ]2, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto 1 + \left(x - \frac{1}{x^\alpha}\right)$$

a) Pour  $x > 2, \frac{1}{x} < \frac{1}{2} - \frac{1}{x} > -\frac{1}{2} \quad 1 - \frac{1}{x} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$h$  est donc bien défini.  $h$  est  $C^\infty$  et

pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1 - \frac{1}{2x}}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \\ &= 1 + \frac{\ln(1 - u)}{u} - \frac{1}{2} \ln(1 - u) \text{ où on a posé } u = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

donc en faisant  $x \rightarrow +\infty$ , i.e.  $u \rightarrow 0$ .

$$\frac{\ln(1-u)}{u} \rightarrow -1 \quad \ln(1-u) \rightarrow 0 \text{ donc}$$

$$h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

De même

$$h'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} + \frac{\frac{1}{2x^2}(x-1) - \left(1 - \frac{1}{2x}\right)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} - 1 - \frac{1}{2x^2}}{(x-1)^2} + \frac{1 - \frac{1}{x}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-\frac{1}{2x^2}}{(x-1)^2} < 0 \end{aligned}$$

Or  $h(2) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2 < 0$  et  $h'(2) = -\ln 2 + \frac{3}{2} \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4} - \ln 2 > 0$ . On obtient le tableau

suivant :

|          |            |           |
|----------|------------|-----------|
| $x$      | 0          | $+\infty$ |
| $h''(x)$ | -          |           |
| $h'(x)$  | $h'(2)$    | 0         |
|          | $\searrow$ |           |
| $h(x)$   |            | 0         |
|          | $\nearrow$ |           |
|          | $h(2)$     |           |

on a donc :  $h(x) < 0 \quad \forall x \geq 2$ .

b)

Pour  $n \geq 2$  :  $t_n - t_{n-1} = h(n) < 0$  donc  $(t_n) \downarrow 0$  d'où  $(S_n = e^{t_n}) \downarrow$ .

c) De plus,  $S_n \geq 0$  donc  $(S_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc converge vers  $L \geq 0$ .

**C)**

1)a)

$g(x) = h(x) + \frac{1}{x^2}$  donc  $g'(x) = h'(x) - \frac{2}{x^3}$  et

$$g''(x) = h''(x) + \frac{6}{x^4} = \frac{-\frac{x^2}{2} + 6(x-1)^2}{x^4(x-1)^2} = \frac{\frac{11}{2}x^2 - 12x + 6}{x^4(x-1)^2}$$

Le discriminant réduit est

$$\Delta' = 6^2 - 6 \cdot \frac{11}{2} = 3$$

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{3}}{\frac{11}{2}} \approx 0.78$$

$$x_2 = \frac{6 + \sqrt{3}}{\frac{11}{2}} \approx 1.4 < 2$$

donc

$$g''(x) > 0 \quad \forall x \geq 2.$$

De plus,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$ . On obtient donc le tableau suivant :

|          |            |           |
|----------|------------|-----------|
| $x$      | 0          | $+\infty$ |
| $g''(x)$ | +          |           |
| $g'(x)$  |            | 0         |
|          | $\nearrow$ |           |
|          | $g'(2)$    |           |
| $g(x)$   | $g(2)$     |           |
|          | $\searrow$ |           |
|          |            | 0         |

$$g(x) > 0 \quad \forall x \geq 2.$$

b) Soit  $n \geq 2$ .  $t_n - t_{n-1} = h(n) = \underbrace{g(n)}_{>0} - \frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{n^2}.$

2 - a)

Soit  $n \geq 2$  :

$$t_1 = \ln e = 1 \geq -1.$$

$$t_n - t_1 = \sum_{k=2}^n (t_k - t_{k-1}) \geq \sum_{k=2}^n -\frac{1}{k^2}$$

$$t_n \geq 1 - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \geq -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

b)

On prend  $\alpha = 2$ .

$$t_n \geq -w_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{or } w_n \leq \frac{2}{\alpha-1} = 2 \text{ donc } \forall n \geq 1, \quad t_n \geq -2$$

$S_n = e^{-t_n} \geq e^{-2}$  d'où en passant à la limite  $L \geq e^{-2} > 0$ .

3)

a) On considère à présent la suite  $(r_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $r_n = \frac{S_{2n}}{S_n^2}$   
 $(S_{2n})$  est une suite extraite de  $(S_n)$  donc  $S_{2n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} L$

donc  $r_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \frac{L}{L^2} = \frac{1}{L}$

b)

Pour  $n \geq 1$ ,

$$r_n = \frac{(2n)!e^{2n} n^{2n+1}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} n!^2 e^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!^2 2^{2n+\frac{1}{2}}}$$

c)  $\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!^2 (2n+1)}{n!^4 2^{4n}}$

Et en prenant la racine carrée

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{\pi}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)! \sqrt{2n+1}}{n!^2 2^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)! \sqrt{n}}{n!^2 2^{2n+\frac{1}{2}}} \times \frac{\sqrt{2n+1} \sqrt{2}}{\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n \times 2 \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n \times 2 \\ &= \frac{2}{L} \end{aligned}$$

donc  $L = 2 \times \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2\pi}$

On en déduit que  $S_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2\pi}$

donc

$$\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 1$$

## Problème 2

### RAPPELS

*Propriétés de la relation d'ordre  $\leq$  dans  $\mathbb{Z}$*

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .

- (0) La relation d'ordre est totale i.e  $a \leq b$  ou  $b \leq a$ .
- (1) symétrie  $a \leq b$  et  $b \leq a \Rightarrow a = b$
- (2) transitivité  $a \leq b$  et  $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ .
- (3) invariance par addition  $a \leq b$  et  $c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$
- (4) invariance par multiplication par un entier positif.  $a \leq b$  et  $c > 0 \Rightarrow ca \leq cb$   
(cette propriété découle de l'invariance par addition)
- (5) changement de sens des inégalités quand on prend l'opposé.  $a \leq b \Rightarrow -b \leq -a$

1)  
Soit  $G$  un ensemble muni d'une loi  $+$  et d'une relation d'ordre  $\leq$  ayant les mêmes propriétés que dans  $\mathbb{Z}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Si  $x \geq 0$ ,  $2^n > 0$  donc  $2^n \cdot x \geq 0$  donc  $p = 0$  convient ;  $0 \in \mathcal{P}_n$ .
- Si  $x < 0$ ,  $-x > 0$ . D'après la propriété  $\mathcal{A}$ , il existe un entier  $k > 0$  /  $2^n(-x) \leq k \cdot u$   
donc  $(-k) \cdot u \leq 2^n \cdot x$  donc  $-k \in \mathcal{P}_n$ .

$\mathcal{P}_n$  n'est donc pas vide.

Or  $\mathcal{P}_n$  est majoré par  $2^n \cdot x$  donc  $\mathcal{P}_n$  admet un plus grand élément  $p_n$ .

$\forall p \in \mathcal{P}_n, p \leq p_n$  et  $p_n \in \mathbb{N}$

2)  $p_n \in \mathcal{P}_n$  donc  $p_n \cdot u \leq 2^n \cdot x$

$1 + p_n > p_n$  donc  $1 + p_n \notin \mathcal{P}_n$ . Par conséquent  $(1 + p_n) \cdot u > 2^n \cdot x$ .

$p_n u \leq 2^n x < (1 + p_n)u$ . On a de même  $p_{n+1}u \leq 2^{n+1}x < (1 + p_{n+1})u$

On a alors :  $p_{n+1}u - 2u \leq 2^{n+1}x - 2u < 2(1 + p_n)u - 2u = p_n u$

$(p_{n+1} - 2p_n - 2)u < 0$ .

Comme  $u > 0, p_{n+1} - 2p_n - 2 < 0$

$p_{n+1} < 2p_n + 2$  : inégalité dans  $\mathbb{Z}$  donc  $p_{n+1} \leq 1 + 2p_n$

On a aussi  $2p_n u \leq 2^{n+1}x < (1 + p_{n+1})u$

donc  $2p_n < 1 + p_{n+1}$  : inégalité dans  $\mathbb{Z}$

donc  $2p_n \leq p_{n+1}$

En conclusion

$$2p_n \leq p_{n+1} \leq 1 + 2p_n$$

3)a)

On pose pour  $n \in \mathbb{N}, y_n = 2^{-n}p_n$

pour  $n \in \mathbb{N}, y_{n+1} - y_n = 2^{-n-1}p_{n+1} - 2^{-n}p_n = 2^{-n-1}(p_{n+1} - 2p_n) \geq 0$  d'après la question précédente.

La suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.

b)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

$p_{k+1} - 2p_k \leq 1 \forall k \in \mathbb{N}$   
 donc  $y_{k+1} - y_k = 2^{-k-1}(p_{k+1} - 2p_k) \leq 2^{-k-1}, \forall k \in \mathbb{N}$  donc  
 $\sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1} - y_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-(k+1)} = \frac{1}{2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n \leq 1$   
 donc  $y_n - y_0 \leq 1$   
 $y_n \leq 1 + y_0$  donc la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée donc elle converge vers un réel  $r(x)$ .  
 4)

**Lemme 1.** Si  $k : G \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie  $\mathcal{S}$  alors  $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall y \in G, h(ay) = ah(y)$ .

*Démonstration.* Soit  $y \in G$ . On a  $h(0) = h(0 + 0) = h(0) + h(0)$  donc  $h(0) = 0$ .  $h(0) = h(y + (-y)) = h(y) + h(-y) = 0$  donc  $h(-y) = -h(y)$ . Par récurrence sur  $n \geq 1$ , montrons que  $h(ny) = nh(y)$ . C'est vrai pour  $n = 1$ . Supposons le résultat vrai au rang  $n$ .  $h((n+1)y) = h(ny + y) = h(ny) + h(y) \stackrel{H.R}{=} nh(y) + h(y) = (n+1)h(y)$   
 donc  $\forall n \in \mathbb{N}, h(ny) = nh(y)$ . Cette relation est encore valable sur  $\mathbb{Z}$  : car si  $m \in \mathbb{Z}, m < 0$   $h(my) = h(-(-my)) = -h(-my) = -(-m)h(y) = mh(y)$ . Donc  $\forall a \in \mathbb{Z}, h(ay) = ah(y)$ . □

Supposons qu'un tel  $h$  existe. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $h$  étant croissante, en appliquant  $h$  à chaque terme de l'inégalité  $p_n u \leq 2^n x < (1 + p_n)u$  on obtient  $h(p_n u) \leq h(2^n x) \leq h((1 + p_n)u)$   
 $p_n h(u) \leq 2^n h(x) \leq (1 + p_n)h(u)$  et comme  $h(u) = 1$ , l'inégalité devient  $p_n \leq 2^n h(x) \leq 1 + p_n$

ou encore (en multipliant chaque terme par  $2^{-n}$ )  $y_n \leq h(x) \leq 2^{-n} + y_n$

En passant à la limite on a par le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)  $h(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = r(x)$ .

## Partie B

1)a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a les inégalités :  $p_n u \leq 2^n x < (1 + p_n)u$   $p'_n u \leq 2^n x < (1 + p'_n)u$   
 $x' - x > 0$  et  $2^n > 0$  donc  $2^n(x' - x) > 0$ .  $-2^n x \leq -p_n u$   $2^n(x' - x) = 2^n x' + (-2^n x) < (1 + p'_n)u - p_n u$

$$0 < 2^n(x' - x) < (1 + p'_n - p_n)u$$

b)

$x' - x > 0$  donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n_0(x' - x) > u$  Comme  $2^{n_0} > n_0$

$$2^{n_0}(x' - x) > n_0(x' - x) > u$$

c) Soit  $n > n_0$  :  $2^n(x' - x) < (1 + p'_n - p_n)u$   
 $2^{n-n_0} 2^{n_0}(x' - x) < (1 + p'_n - p_n)u$

$$2^{n-n_0}u < 2^{n-n_0}2^{n_0}(x' - x) < (1 + p'_n - p_n)u$$

comme  $u > 0$  on en déduit que  $2^{n-n_0} < 1 + p'_n - p_n$

En multipliant par  $2^{-n}$  on obtient  $2^{-n_0} < 2^{-n} + y'_n - y_n$   $y'_n - y_n > 2^{-n_0} - 2^{-n}$

d)

En passant à la limite ( $n \rightarrow +\infty, n > n_0$ ) dans l'inégalité  $y'_n - y_n > 2^{-n_0} - 2^{-n}$  on obtient  $r(x') - r(x) \geq 2^{-n_0} > 0$  donc  $r(x') > r(x)$  donc  $x \mapsto r(x)$  est strictement croissante sur  $G$ .

2)a)

on pose  $x'' = x + x'$

En additionnant les deux inégalités  $p_n u \leq 2^n x < (1 + p_n)u$

$$p'_n u \leq 2^n x < (1 + p'_n)u$$

on obtient

$$(p_n + p'_n)u \leq 2^n(x + x') < (2 + p_n + p'_n)u$$

D'autre part  $p''_n u \leq 2^n x'' < (1 + p''_n)u$

donc  $2^n x'' - u < p''_n u \leq 2^n x''$

Or  $(p_n + p'_n)u \leq 2^n(x + x') < (2 + p_n + p'_n)u$  et  $u > 0$  donc  $(p_n + p'_n)u - u \leq p''_n u < (2 + p_n + p'_n)u$  et  $p_n + p'_n - 1 \leq p''_n < 2 + p_n + p'_n$  dans  $\mathbb{Z}$

En passant aux inégalités larges

$$p_n + p'_n \leq p''_n \leq 1 + p_n + p'_n$$

En multipliant par  $2^{-n}$  on obtient :  $y_n + y'_n \leq y''_n \leq 2^{-n} + y_n + y'_n$

et par le théorème d'encadrement on a en passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$   $r(x'') = r(x) + r(x')$ .

3) Calculons  $r(u)$

En prenant  $x = u$ , on a  $\mathcal{P}_n = \{p; p \in \mathbb{Z} \text{ et } pu \leq 2^n u\} = \{p; p \in \mathbb{Z} \text{ et } p \leq 2^n\}$  car  $u > 0$  donc  $p_n = 2^n$  et  $y_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}$

d'où  $r(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 1$

4)

$r$  est strictement croissante,  $r$  vérifie  $\mathcal{S}$  et  $r(u) = 1$  donc  $h$  existe et  $h = r$  par unicité.

## Partie C

On prend  $G = \mathbb{R}$ . Soit  $f$  une application croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  possédant la propriété  $\mathcal{S}$ .

1) Supposons que  $f(1) = 0$  a)

On a déjà vu dans le lemme que  $f(0) = 0$ . b) Soit  $x \in [0, 1]$ .  $f$  est croissante donc  $0 = f(0) \leq f(x) \leq f(1) = 0$  donc  $f(x) = 0$ .

c)

D'après le lemme on a  $f(n) = nf(1) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ .

d)

Soit  $y \in \mathbb{R}$ . On écrit  $y = E(y) + \text{Frac}(y)$  avec  $0 \leq \text{Frac}(y) < 1$  ( $\text{Frac}(y)$  est la partie fractionnaire de  $y$ ).

En appliquant  $f$  on obtient  $f(y) = f(E(y) + \text{Frac}(y)) = f(E(y)) + f(\text{Frac}(y)) = 0 + 0 = 0$ .

Donc  $f = 0$

2)

$f$  est croissante donc  $f(1) \geq f(0) = 0$ .

Comme  $f(1) \neq 0$ ,  $f(1) > 0$ . On définit une application  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$ .

Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ .

$$h(x+y) = \frac{f(x+y)}{f(1)} = \frac{f(x) + f(y)}{f(1)} = h(x) + h(y)$$

donc  $h$  vérifie (H). De plus, si  $x < x'$ ,

$f(x) \leq f(x')$  et comme  $f(1) > 0$ ,  $h(x) \leq h(x')$ .

$h$  est donc croissante. On a aussi  $h(1) = 1$ .

b)

Soit  $x \in \mathbb{R}_+$

$$\mathcal{P}_n = \{p \in \mathbb{Z}; p.1 \leq 2^n x\}$$

On a donc  $p_n = E(2^n x)$  et  $2^n x - 1 < p_n \leq 2^n x$  et en multipliant par  $2^{-n}$  :  $x - 2^{-n} < y_n \leq x$  En passant à la limite  $n \rightarrow +\infty$  :  $x \leq r(x) \leq x$  donc  $r(x) = x$ .

Donc par unicité on a  $h(x) = r(x) = x \forall x \in \mathbb{R}_+$

Si  $x < 0$ , le lemme donne  $h(x) = -h(-x) = -(-x) = x$ . donc  $h(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$ .

3)

On en déduit que  $f(x) = x f(1) \forall x \in \mathbb{R}$ .

Les seules applications strictement croissantes de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  et vérifiant (H) sont les applications  $x \mapsto ax$  où  $a > 0$ .