

Concours général sénégalais 2001:Corrigé de
l'épreuve de Mathématiques

Darwin

September 3, 2009

Introduction

Partie 1

Soit $\mathcal{U} = \{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (4n+2)U_n + U_{n-1}\}$

1. Soit $W \in \mathcal{U}$.

Remarque 1. Remarquons d'abord que si U_k et U_{k-1} sont de même signe alors $\forall n \geq k-1, U_n$ a le même signe que U_{k-1} . On le montre par récurrence sur $n \geq k-1$.

Supposons que U_n et U_{n+1} ont le signe de U_{k-1} . Alors $U_{n+2} = (4n+6)U_{n+1} + U_n$ a le même signe que U_{k-1} donc U_{n+1} et U_n ont le signe de U_{k-1} ; ce qui achève la récurrence.

Soit U et $V \in \mathcal{U}$ telles que $U_0 = V_0 = 1; U_1 = -0,1639, V_1 = -0,1640$

La calculatrice donne:

$U_0 = 1$	$V_0 = 1$
$U_1 = -0,1639$	$V_1 = -0,1640$
$U_2 = 0,0166$	$V_2 = 0,016$
$U_3 = 0,0021$	$V_3 = -0,004$
	$V_4 = -0,04$

Donc $\forall n \geq 2, \forall m \geq 3, U_n > 0$ et $V_m < 0$. Soit $n \geq 3$: $U_{n+1} - U_n = (4n+1)U_n + U_{n-1} > 0$ donc $(U_n)_{n \geq 3}$ est croissante. Donc on a de plus, pour $n \geq 4, U_{n+1} = (4n+2)U_n + U_{n-1} \geq (4n+2)U_3 = 0,0021(4n+2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

De même $(V_m)_{m \geq 4}$ est décroissante et $\lim_{m \rightarrow +\infty} V_m = -\infty$

2.

a) Pour $n \geq 0$, on pose $c_n = a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$

$c_0 = a_0 b_1 = a_0^2$. Soit $n \geq 1$: $c_{n+1} = a_{n+1} b_{n+2} - a_{n+2} b_{n+1} = a_{n+1}((4n+6)b_{n+1} + b_n) - b_{n+1}((4n+6)a_{n+1} + a_n) = a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} = -c_n$

donc $c_n = (-1)^n c_0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = (-1)^n a_0^2$$

b) Supposons que $a_0 \neq 0$. Posons $r_n = \frac{a_n}{b_n}, n \geq 2$.

Quitte à remplacer a_n par $a'_n = -a_n$ et b_n par $b'_n = -b_n$ et r_n par $r'_n = \frac{a'_n}{b'_n} = \frac{a_n}{b_n} = r_n$, on peut supposer que $a_0 > 0$.

On sait que $b_0 = 0$ et $b_1 = a_0 > 0$ donc d'après la Remarque 1, $\forall n \geq 2, b_n > 0$ donc r_n est bien définie pour $n \geq 2$.

Soit donc $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
r_{n+2} - r_n &= \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} - \frac{a_n}{b_n} \\
&= \frac{a_{n+2}b_n - a_nb_{n+2}}{b_nb_{n+2}} \\
&= \frac{(4n+6)a_{n+1}b_n + a_nb_n - (4n+6)b_{n+1}a_n - a_nb_n}{b_nb_{n+2}} \\
&= \frac{(4n+6)c_{n+1}}{b_nb_{n+2}} \\
&= \frac{(4n+6)(-1)^{n+1}a_0^2}{b_n((4n+6)b_{n+1} + b_n)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
r_{n+1} - r_n &= \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} \\
&= \frac{a_{n+1}b_n - a_nb_{n+1}}{b_nb_{n+1}} \\
&= \frac{c_{n+1}}{b_nb_{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}a_0^2}{b_nb_{n+1}}
\end{aligned}$$

Remarquons que pour $p \geq 2$, $b_{p+1} = (4p+2)b_p + b_{p-1} \geq (4p+2)b_p$ donc on a d'une part $(b_p)_{p \geq 2}$ est croissante et d'autre part

$$b_{p+1} \geq (4p+2)b_2 = (4p+2)a_0 \rightarrow_{p \rightarrow +\infty} +\infty \quad (1)$$

$$\text{On a aussi } r_{2p+2} - r_{2p} = -\frac{(8p+6)a_0^2}{b_{2p}((8p+6)b_{2p+1}+b_{2p})} < 0$$

$$r_{2p+3} - r_{2p+1} = \frac{(8p+10)a_0^2}{b_{2p+1}((8p+10)b_{2p+2}+b_{2p+1})} > 0$$

donc $(r_{2p})_{p \geq 1}$ est décroissante et $(r_{2p+1})_{p \geq 1}$ est croissante et $\forall p \geq 1$, $r_{2p} -$

$$r_{2p+1} = \frac{a_0^2}{b_{2p}b_{2p+1}} > 0$$

On obtient finalement les inégalités:

$$\forall p \geq 1, r_3 \leq r_{2p+1} < r_{2p} \leq r_2$$

$(r_{2p})_{p \geq 1}$ est décroissante et minorée par r_3 donc elle converge vers un réel α .

$(r_{2p+1})_{p \geq 1}$ est croissante et majorée par r_2 donc elle converge vers un réel β .

De plus on sait que $\forall p \geq 1$, $r_{2p+1} - r_{2p} = -\frac{a_0^2}{b_{2p}b_{2p+1}}$ et que d'après (1), $b_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc en faisant $p \rightarrow +\infty$, on obtient $\beta - \alpha = 0$

Les suites $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}})$ et $(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}})$ sont *adjacentes* de limite commune $\alpha = \beta$.

$(\frac{a_n}{b_n})$ converge vers $\alpha = \beta$.

c) Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et soit $n \geq 1$. Posons $d_n = a_n - \mu b_n$.

On voit clairement que $(d_p) \in \mathcal{U}$ ($d_{p+1} = (4p+2)d_p + d_{p-1}, p \geq 1$) et d_n peut s'écrire $d_n = b_n(\frac{a_n}{b_n} - \mu)$. On va donc distinguer deux cas.

- $\mu \neq \alpha$: $d_n \sim (\alpha - \mu)b_n$ et $|d_n| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$

- $\mu = \alpha$ $d_n = b_n(\frac{a_n}{b_n} - \mu)$

Il faut estimer la vitesse de convergence de la suite (r_p) vers α ie $|\frac{a_p}{b_p} - \alpha|$
On va montrer un lemme.

Lemme 1. $\forall p \geq 1, \left| \frac{a_p}{b_p} - \alpha \right| \leq \frac{a_0^2}{b_p^2}$

Proof. On va distinguer deux cas suivant la parité de p :

– p est pair; $p = 2k$

$$|r_{2k} - \alpha| = r_{2k} - \alpha \leq r_{2k} - r_{2k+1} = \frac{a_0^2}{b_{2k}b_{2k+1}} \leq \frac{a_0^2}{b_{2k}^2}.$$

La première égalité vient du fait que $r_{2k} > \alpha$, la première inégalité provient du fait que $r_{2k+1} < \alpha$ et la deuxième inégalité du fait que $(b_n)_{n \geq 2}$ est croissante et donc que $b_{2p} \leq b_{2p+1}$.

– De même:

$$|r_{2k+1} - \alpha| = \alpha - r_{2k+1} \leq r_{2k+2} - r_{2k+1} = \frac{a_0^2}{b_{2k+2}b_{2k+1}} \leq \frac{a_0^2}{b_{2k+1}^2}$$

Donc $\forall p \geq 1, \left| \frac{a_p}{b_p} - \alpha \right| \leq \frac{a_0^2}{b_p^2}$

□

$$|d_n| = b_n \left| \frac{a_n}{b_n} - \mu \right| \leq b_n \frac{a_0^2}{b_n^2} = \frac{a_0^2}{b_n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $(a_n - \mu b_n) \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$ ssi $\mu = \alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$.

Remarque 2. Soit U et V deux éléments de $\mathcal{U}$ tels que $U_0 = V_0$ et $U_1 = V_1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = V_n$.

Par récurrence sur n , soit (P_n) la propriété: $U_n = V_n$ et $U_{n+1} = V_{n+1}$.

(P_0) est vraie. Supposons que (P_n) est vraie. $U_{n+2} = (4n+6)U_{n+1} + U_n = (4n+6)V_{n+1} + V_n = V_{n+2}$ donc $U_{n+1} = V_{n+1}$ et $U_{n+2} = V_{n+2}$ donc (P_{n+1}) est vraie d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = V_n$.

La suite nulle tend évidemment vers 0. Soit U une suite non nulle de $\mathcal{U}$

- Si $U_0 = 0$ on a $U_1 \neq 0$, et par le même raisonnement qu'avant, $|U_n| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- Si U_0 est non nulle.

On définit les suites (a_n) et $(b_n) \in \mathcal{U}$ telles que

$a_0 = b_1 = 1$ et $a_1 = b_0 = 0$; on pose $\gamma = -\frac{U_1}{U_0}$ et $\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n}$.
On a $U_0 = U_0(a_0 - \gamma b_0)$ et $U_1 = U_0(a_1 - \gamma b_1)$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0(a_n - \gamma b_n)$.

D'après l'étude faite avant, U tend vers 0 ssi $\gamma = \alpha$ ie $U_n = U_n = U_0(a_n - \alpha b_n)$

donc les éléments de $\mathcal{U}$ qui tendent vers 0 sont exactement les U tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \lambda(a_n - \alpha b_n)$.

3. On définit pour $n \geq 0$, une suite de fonctions ϕ_n définies sur $\mathbb{R}$ par $\phi_0(t) = 1$ et pour $n \geq 1, \phi_n(t) = \frac{t^n(t-1)^n}{n!}$

a) Soit $n \geq 1$.

$$\phi'_{n+1}(t) = (2t-1)(n+1) \frac{(t^2-t)^n}{(n+1)!} = (2t-1) \frac{(t^2-t)^n}{n!} = (2t-1)\phi_n(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} \phi''_{n+1}(t) &= 2\phi_n(t) + (2t-1)\phi'_n(t) \\ &= 2\phi_n(t) + (2t-1)^2\phi_{n-1}(t) \\ &= 2\phi_n(t) + (4(t^2-t) + 1) \frac{(t^2-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 2\phi_n(t) + n \times 4 \frac{(t^2-t)^n}{n \times (n-1)!} + \frac{(t^2-t)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= 2\phi_n(t) + n \times 4\phi_n(t) + \phi_{n-1}(t) \\ &= (4n+2)\phi_n(t) + \phi_{n-1}(t) \end{aligned}$$

b) $I_0 = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - e^{-1}$.

$I_1 = \int_0^1 (t^2 e^{-t} - t e^{-t}) dt$ En intégrant par parties on obtient:

$$\begin{aligned} \int_0^1 t^2 e^{-t} dt - \int_0^1 t e^{-t} dt &= [-t^2 e^{-t}]_0^1 + 2 \int_0^1 t e^{-t} dt - \int_0^1 t e^{-t} dt \\ &= -e^{-1} + \int_0^1 t e^{-t} dt \\ &= -e^{-1} + [-t e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt \\ &= -e^{-1} - e^{-1} + 1 - e^{-1} \\ I_1 &= 1 - 3e^{-1} \end{aligned}$$

Soit $n \geq 1$. Montrons en intégrant par parties que $I_{n+1} = (4n+2)I_n + I_{n-1}$

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 \phi_{n+1}(t)e^{-t} dt \\
&= [-\phi_{n+1}(t)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 \phi'_{n+1}(t)e^{-t} dt \\
&= \int_0^1 \phi'_{n+1}(t)e^{-t} dt \\
&= [-\phi'_{n+1}(t)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 \phi''_{n+1}(t)e^{-t} dt \\
&= \int_0^1 \phi''_{n+1}(t)e^{-t} dt \\
&= \int_0^1 ((4n+2)\phi_n(t) + \phi_{n-1}(t))e^{-t} dt \\
I_{n+1} &= (4n+2)I_n + I_{n-1}
\end{aligned}$$

c) On sait que pour $0 \leq t \leq 1$, $|t(t-1)| \leq t \leq 1$ et $e^{-t} \leq 1$ donc

$$\begin{aligned}
|I_n| &= \left| \int_0^1 \frac{(t(t-1))^n}{n!} e^{-t} dt \right| \\
&\leq \int_0^1 \left| \frac{(t(t-1))^n}{n!} e^{-t} \right| dt \\
&\leq \int_0^1 1^n \times \frac{1}{n!} \times 1 dt \\
&= \int_0^1 \frac{1}{n!} dt \\
&= \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus $(I_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ donc en reprenant les notations du 2.c) $\gamma = \alpha = -\frac{I_1}{I_0} = -\frac{1-3e^{-1}}{1-e^{-1}} = \frac{3-e}{e-1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{3-e}{e-1}.$$

d) On a $I_{n+1} = (4n+2)I_n + I_{n-1}$ donc

$$-\frac{I_{n-1}}{I_n} = 4n+2 - \frac{I_{n+1}}{I_n} = 4n+2 + \frac{1}{-\frac{I_n}{I_{n+1}}}$$

donc en posant $y_n = -\frac{I_{n-1}}{I_n}$ ($n \geq 1$) on a la relation de récurrence

$$y_n = 4n + 2 + \frac{1}{y_{n+1}}$$

$$\frac{3-e}{e-1} = -\frac{I_1}{I_0} = -\frac{1}{\frac{I_0}{I_1}} = \frac{1}{y_1} = \frac{1}{6 + \frac{1}{y_2}} = \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{y_3}}} = \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{y_4}}}} = \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}$$

.

4.

a) $P_n - P'_n = \phi_n, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (P_n(t) - P'_n(t))e^{-t} dt \\ &= [-P_n(t)e^{-t}]_0^1 + \int_0^1 P'_n(t)e^{-t} dt - \int_0^1 P'_n(t)e^{-t} dt \\ &= -e^{-1}P_n(1) + P_n(0) \end{aligned}$$

b) Remarquons que comme P_n est à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $P_n(1)$ et $P_n(0)$ sont dans $\mathbb{Q}$. Or $I_{n+1} = (4n+2)I_n + I_{n-1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -e^{-1}P_{n+2}(1) + P_{n+1}(0) &= (4n+2)(-e^{-1}P_n(1) + P_n(0)) + (-e^{-1}P_{n-1}(1) + P_{n-1}(0)) \\ \Rightarrow e^{-1} \underbrace{(-P_{n+1}(1) + (4n+2)P_n(1) + P_{n-1}(1))}_{\in \mathbb{Q}} &= \underbrace{-P_{n+1}(0) + (4n+2)P_n(0) + P_{n-1}(0)}_{\in \mathbb{Q}} \end{aligned}$$

Or $e \notin \mathbb{Q}$, donc $-P_{n+1}(1) + (4n+2)P_n(1) + P_{n-1}(1) = -P_{n+1}(0) + (4n+2)P_n(0) + P_{n-1}(0) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P_{n+1}(1) = (4n+2)P_n(1) + P_{n-1}(1)$ et $P_{n+1}(0) = (4n+2)P_n(0) + P_{n-1}(0)$

donc les suites $(P_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $\mathcal{U}$.

5.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $(\frac{t^k}{k!})' = k \frac{t^{k-1}}{k(k-1)!} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$ et que

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

donc $Q'_n(t) = 1 + t + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}$

$$Q_n(t) - Q'_n(t) = \frac{t^n}{n!}$$

b) Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
P_n\left(\frac{1}{2} + u\right) - P'_n\left(\frac{1}{2} + u\right) &= \phi_n\left(\frac{1}{2} + u\right) \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} + u\right)^n \left(-\frac{1}{2} + u\right)^n}{n!} \\
&= \frac{\left(u^2 - \frac{1}{4}\right)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{4^{n-k}} u^{2k} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{n-k}}{2^{2(n-k)}} u^{2k} \frac{(2k)!}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} W_k}{2^{2(n-k)} (n-k)!} \frac{u^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} W_k}{2^{2(n-k)} (n-k)!} (Q_{2k}(u) - Q'_{2k}(u))
\end{aligned}$$

On pose $S_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} W_k}{2^{2(n-k)} (n-k)!} Q_{2k}(X - \frac{1}{2})$

On a $\forall u \in \mathbb{R}, P_n(\frac{1}{2} + u) - P'_n(\frac{1}{2} + u) = S_n(\frac{1}{2} + u) - S'_n(\frac{1}{2} + u)$

$\forall v \in \mathbb{R}, P_n(v) - P'_n(v) = S_n(v) - S'_n(v)$ donc $P_n - P'_n = S_n - S'_n = \phi_n$

Par unicité de la décomposition, $P_n = S_n$ donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, P_n\left(\frac{1}{2} + u\right) = S_n\left(\frac{1}{2} + u\right) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} W_k}{2^{2(n-k)} (n-k)!} Q_{2k}(u) \quad (*)$$

c)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{P_n(\frac{1}{2} + u)}{W_n} - Q_{2n}(u) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} \frac{W_k}{W_n}}{2^{2(n-k)} (n-k)!} Q_{2k}(u) \right| \\
&\leq_{\text{par inégalité triangulaire}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_k}{W_n} \frac{1}{2^{2(n-k)} (n-k)!} |Q_{2k}(u)|
\end{aligned}$$

La suite $(|Q_{2k}(u)|)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée par $e^{|u|}$; en effet

Pour $N \geq 0$:

$$|Q_{2k}(u)| = \left| \sum_{j=0}^{2k} \frac{u^j}{j!} \right| \leq_{\text{par inégalité triangulaire}} \sum_{j=0}^{2k} \frac{|u|^j}{j!} \leq \sum_{j=0}^{2k+N} \frac{|u|^j}{j!} \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{2k+N} \frac{|u|^j}{j!} = e^{|u|}$$

Or $W_p = \frac{(2p)!}{p!} = \frac{2p(2p-1)(2p-2)!}{p(p-1)!} = 2(2p-1)W_{p-1}$ donc $W_p > W_{p-1}$.
Donc

$$\begin{aligned}
\left| \frac{P_n(\frac{1}{2} + u)}{W_n} - Q_{2n}(u) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_k}{W_n} \frac{1}{2^{2(n-k)}(n-k)!} |Q_{2k}(u)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_k}{2(2n-1)W_{n-1}} \frac{1}{2^{2(n-k)}(n-k)!} e^{|u|} \\
&\leq \frac{1}{2(2n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{W_k}{W_{n-1}} \frac{1}{2^{2(n-k)}(n-k)!} e^{|u|} \\
&= \frac{1}{2(2n-1)} \left[\frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{W_k}{2(2n-3)W_{n-2}} \frac{1}{2^{2(n-k)}(n-k)!} \right] e^{|u|}
\end{aligned}$$

Or $\frac{W_k}{W_{n-2}} \leq 1$ pour $0 \leq k \leq n-2$, donc

$$\begin{aligned}
\left| \frac{P_n(\frac{1}{2} + u)}{W_n} - Q_{2n}(u) \right| &\leq \frac{1}{2(2n-1)} \left[\frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2(2n-3)} \underbrace{\frac{1}{2^{2(n-k)}(n-k)!}}_{\leq 1} \right] e^{|u|} \\
&\leq \frac{1}{2(2n-1)} \left[\frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2(2n-3)} \right] e^{|u|} \\
&\leq \frac{1}{2(2n-1)} \left[\frac{1}{4} + \frac{n-1}{2(2n-3)} \right] e^{|u|}
\end{aligned}$$

Et $2(2n-3) - (n-1) = 3n-5 > 0$ pour $n \geq 2$. De sorte que $\frac{n-1}{2(2n-3)} < 1$ pour $n \geq 2$; on a donc $\left| \frac{P_n(\frac{1}{2} + u)}{W_n} - Q_{2n}(u) \right| \leq \frac{1}{2n-1} \frac{5}{8} e^{|u|} \leq \frac{k}{2n-1}$ avec $k = \frac{5}{8} e^{|u|}$.

On en déduit que pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{P_n(\frac{1}{2} + u)}{W_n} - e^u \right| &\leq \left| \frac{P_n(\frac{1}{2} + u)}{W_n} - Q_{2n}(u) \right| + |Q_{2n}(u) - e^u| \\
&\leq \frac{k}{2n-1} + |Q_{2n}(u) - e^u| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n(\frac{1}{2} + u)}{W_n} = e^u$$

Soit $U \in \mathcal{U}$. On cherche a et b tels que $U_n = aP_n(1) - bP_n(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On va d'abord déterminer P_0 et P_1 .

Remarquons que $\deg(P_n - P'_n) = \deg P_n$. On a $P_0 - P'_0 = 1$ donc P_0 est de degré 0 (constante) et $P'_0 = 0$. $P_0 = 1$.

$P_1 - P'_1 = \phi_1 = X^2 - X$, donc $\deg P_1 = \deg(P_1 - P'_1) = 2$, comme le coefficient dominant de $X^2 - X$ est 1, le coefficient dominant de P_1 est 1. On cherche P_1 de la forme $P_1 = X^2 + cX + d$ avec c et d des réels. $P_1 - P'_1 = X^2 + cX + d - (2X + c) = X^2 - X$ donc en identifiant les coefficients, $c - 2 = -1$ et $d - c = 0$ donc $c = d = 1$.

$$P_1 = X^2 + X + 1$$

$$\text{On a alors } U_0 = aP_0(1) - bP_0(0) = a - b$$

$$U_1 = aP_1(1) - bP_1(0) = 3a - b$$

$$\text{On tire } a = \frac{U_1 - U_0}{2}, b = \frac{U_1 - 3U_0}{2} \text{ On a donc}$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \frac{U_n}{W_n} &= \frac{aP_n(1) - bP_n(0)}{W_n} = a \frac{P_n(1)}{W_n} - b \frac{P_n(0)}{W_n} \\ &= \frac{U_1 - U_0}{2} \frac{P_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{W_n} - \frac{U_1 - 3U_0}{2} \frac{P_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{W_n} \end{aligned}$$

Et en utilisant (*)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{W_n} = \frac{U_1 - U_0}{2} e^{\frac{1}{2}} + \frac{-U_1 + 3U_0}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

Problème 2

1. On rappelle que pour a et b réels, tels que a, b et $a + b \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

On pose donc $t = \tan \phi$.

$$\begin{aligned} \tan 3\phi &= \frac{\tan \phi + \tan 2\phi}{1 - \tan \phi \tan 2\phi} \\ &= \frac{\tan \phi + \frac{2 \tan \phi}{1 - \tan^2 \phi}}{1 - \tan \phi \frac{2 \tan \phi}{1 - \tan^2 \phi}} \\ &= \frac{t + \frac{2t}{1 - t^2}}{1 - t \frac{2t}{1 - t^2}} \\ &= \frac{t - t^3 + 2t}{1 - t^2 - 2t^2} \end{aligned}$$

$$\tan 3\phi = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$$

2. Pour $t \in \mathbb{R}^*$, soit (Δ_t) la droite d'équation $t^2x - ty + \frac{p}{2} = 0$ Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point du plan. Remarquons que si $t \neq t'$ alors $(\Delta_t) \neq (\Delta_{t'})$. $(x_0, y_0) \in (\Delta_t)$ ssi $t^2x_0 - ty_0 + \frac{p}{2} = 0$ (**).

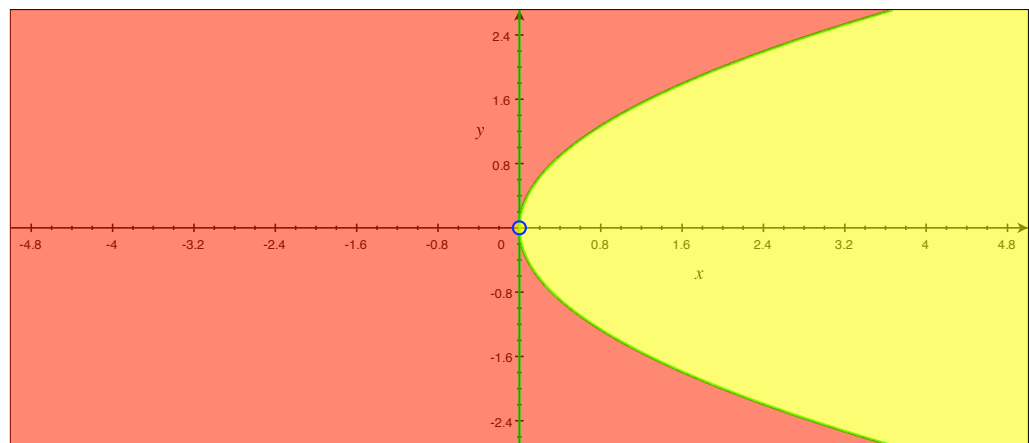
Remarquons que le point $(0, 0)$ n'appartient à aucune droite (Δ_t) .
Si $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$, il y a une seule droite (Δ_{t_*}) qui passe par M_0 avec $t_* = \frac{p}{2y_0}$.
Si $x_0 \neq 0$, le nombre de droites (Δ_t) passant par M_0 est exactement le nombre de solutions de l'équation du second degré en t : $t^2x_0 - ty_0 + \frac{p}{2} = 0$
Son discriminant est $y_0^2 - 2px_0$.

- Si $y_0^2 < 2px_0$
l'équation n'a pas de solutions: aucune droite (Δ_t) ne passe par M_0 .
- Si $y_0^2 = 2px_0$
L'équation a une seule solution et il existe donc une et une seule droite (Δ_{t_0}) passant par M_0 .
- Si $y_0^2 > 2px_0$ L'équation a deux solutions distinctes t_1 et t_2 , donc il y a exactement deux droites passant par M_0 .

Récapitulons:

Pas de droite	1 droite	2 droites
$\{(0, 0)\} \cup \{(x, y) : y^2 < 2px\}$	$(\{(x, y) : y^2 = 2px\} \cup (y'Oy)) \setminus \{(0, 0)\}$	$\{(x, y) : y^2 > 2px\}$

Dans la représentation graphique avec $p = 1$, on a mis en jaune les points où ne passe aucune droite, en vert les points où passe une droite et en rouge les points où passent deux droites (Δ_t) .



On a donc (P) est la parabole d'équation: $y^2 = 2px$ privée du point $(0, 0)$.

S'il ne passe qu'une seule droite (Δ_{t_0}) par $M_0 \in (P)$, on a l'équation de droite:

$$\begin{aligned}
(\Delta_{t_0}) & : y = t_0 x + \frac{p}{2t_0} \\
(\Delta_{t_0}) & : y = \frac{y_0 x}{2x_0} + \frac{2px_0}{2y_0} \\
(\Delta_{t_0}) & : y = \frac{y_0 x}{2x_0} + y_0 \\
(\Delta_{t_0}) & : y = \frac{y_0 p x}{2px_0} + y_0 \\
(\Delta_{t_0}) & : y = \frac{px}{y_0} + y_0
\end{aligned}$$

3.

a) Un vecteur directeur de (Δ_t) est $(1, t)$, donc soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point vérifiant $y_0^2 - 2px_0 > 0$ et $x_0 \neq 0$. Soient (Δ_t) et $(\Delta_{t'})$ les deux droites passant par M_0 .

$$\begin{aligned}
(\Delta_t) \text{ et } (\Delta_{t'}) \text{ sont perpendiculaires} & \text{ssi } (1, t) \perp (1, t') \\
& \text{ssi } (1, t) \cdot (1, t') = 0 \\
& \text{ssi } 1 + tt' = 0
\end{aligned}$$

Or t et t' sont les racines du polynôme $x_0 X^2 - y_0 X + \frac{p}{2}$

$$\text{donc } tt' = \frac{p}{2x_0}$$

$$\Delta_t \text{ et } \Delta_{t'} \text{ sont perpendiculaires ssi } 1 + \frac{p}{2x_0} = 0 \text{ ie } x_0 = -\frac{p}{2}$$

$$(D) : x = -\frac{p}{2}$$

b) De même M_0 est dans (H) ssi $(1, t) \cdot (1, t') = \sqrt{1+t^2} \sqrt{1+t'^2} \cos \frac{\pi}{3}$
ssi $1 + tt' = \frac{1}{2} \sqrt{1+t^2} \sqrt{1+t'^2}$

$$\text{ssi } (2(1 + tt'))^2 = (1 + t^2)(1 + t'^2) = 1 + (tt')^2 + t^2 + t'^2 = 1 + (tt')^2 + (t + t')^2 - 2tt' = (1 - tt')^2 + (t + t')^2$$

$$\text{Or } tt' = \frac{p}{2x_0} \text{ et } t + t' = \frac{y_0}{x_0}$$

$$\text{Donc } M_0 \in (H) \text{ ssi } 4(1 - \frac{p}{2x_0})^2 = (1 + \frac{p}{2x_0})^2 + (\frac{y_0}{x_0})^2$$

$$\text{ssi } 4(x_0 - \frac{p}{2})^2 = (x_0 + \frac{p}{2})^2 + y_0^2$$

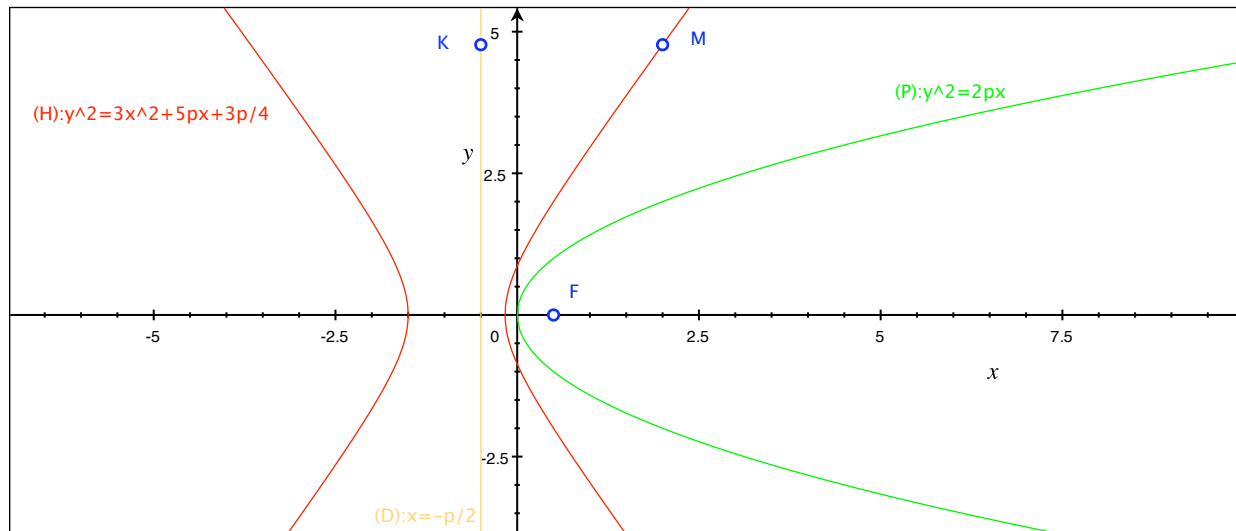
$$\text{ssi } y_0^2 = 3x_0^2 + 5px_0 + \frac{3p^2}{4}$$

$$\text{donc } (H) \text{ est l'hyperbole d'équation } y^2 = 3x^2 + 5px + \frac{3p^2}{4} \quad (2)$$

4. On pose $F = (\frac{p}{2}, 0)$

Soit $M = (x, y) \in (H)$.

Soit $K = (-\frac{p}{2}, y)$ la projection orthogonale de M sur la droite $(D) : x = -\frac{p}{2}$.



On a: $\overrightarrow{MF} = (\frac{p}{2} - x, -y)$
 $\overrightarrow{MK} = (-\frac{p}{2} - x, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{MF^2}{MK^2} &= \frac{(\frac{p}{2} - x)^2 + y^2}{(x + \frac{p}{2})^2} \\ &= \frac{\frac{p^2}{4} + x^2 - px + 3x^2 + 5px + 3\frac{p^2}{4}}{\frac{p^2}{4} + x^2 + px} \\ &\quad (\text{on a remplacé } y^2 \text{ par } 3x^2 + 5px + 3\frac{p^2}{4}) \\ &= \frac{p^2 + 4x^2 + 4px}{\frac{p^2}{4} + x^2 + px} \\ &= \frac{4(\frac{p^2}{4} + x^2 + px)}{\frac{p^2}{4} + x^2 + px} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Donc $\frac{MF}{MK} = 2$.

5.

a) (Δ_t) coupe $(y'Oy)$ en $A_t = (0, \frac{p}{2t})$.

Trouvons l'équation de la droite (Δ') , droite perpendiculaire à (Δ_t) au point A_t .

$(\Delta') : y = t'x + b, t' \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ (car (Δ_t) n'étant jamais une droite horizontale, (Δ') n'est pas une droite verticale).

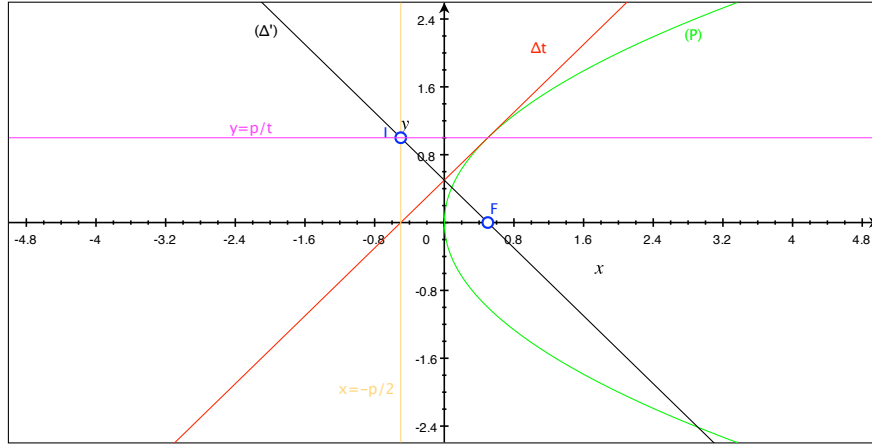
$(\Delta') \perp (\Delta_t)$ donc $1 + tt' = 0$ donc $t' = -\frac{1}{t}$.

$A_t \in (\Delta')$ donc $y(A_t) = -\frac{1}{t}x(A_t) + b$ donc $b = \frac{p}{2t}$.

$(\Delta') : y = -\frac{1}{t}x + \frac{p}{2t} = \frac{1}{t}(\frac{p}{2} - x)$

La droite (Δ') passe donc par le point $F = (\frac{p}{2}, 0)$ quelque soit la valeur de $t \neq 0$. (Δ') coupe (D) au point I d'abscisse $x = -\frac{p}{2}$ et d'ordonnée $\frac{1}{t}(\frac{p}{2} - (-\frac{p}{2})) = \frac{p}{t}$

$$I = (-\frac{p}{2}, \frac{p}{t})$$



Soit $M_t = (x(t), h)$ le point d'intersection de (Δ_t) avec la droite d'équation $y = h$. ($h = \frac{p}{t}$)

$M_t \in (\Delta_t)$ donc: $t^2x(t) - t\frac{p}{t} + \frac{p}{2} = 0$.

donc $x(t) = \frac{p}{2t^2}$.

$M_t = (\frac{p}{2t^2}, \frac{p}{t})$

Le point M_t décrit l'ensemble $\{(\frac{p}{2t^2}, \frac{p}{t}), t \in \mathbb{R}^*\}$

On remarque que $x(M_t)$ et $y(M_t)$ sont non nuls. De plus, $y(M_t)^2 = \frac{p^2}{t^2} = 2px(M_t)$.

Donc tous les points M_t se trouvent sur (P) .

Réciproquement si $M = (x, y) \in (P)$, alors $x \neq 0$ et $y \neq 0$

On pose $t = \frac{p}{y}$ on a alors

$y = \frac{p}{t}$ et $x = \frac{y^2}{2p} = \frac{\frac{p^2}{t^2}}{2p} = \frac{p}{2t^2}$ et donc $M = M_t$.

Les points $M_t, t \in \mathbb{R}^*$ décrivent (P) .

(P) est donc l'ensemble des points qu'on peut voir à angle droit si on se situe sur $y'Oy$ et qu'on regarde F .

6.

a) On pose $M_i = (x_i, y_i)$.

Si t est un réel tel que $1 - 3t^2 = 0$ i.e. $t^2 = \frac{1}{3}$ alors

$$t^3 - 3t + k(1 - 3t^2) = t^3 - 3t = t(t^2 - 3) = t(\frac{1}{3} - 3) = -\frac{8}{3}t \neq 0.$$

Donc les solutions de l'équation (1) vérifient $1 - 3t_i^2 \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

On a donc $k = \frac{3t_i - t_i^3}{1 - 3t_i^2}, i = 1, 2, 3$.

Or $\tan$ établit une bijection continue et croissante entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$ donc il existe ϕ et ϕ_i tels que $\tan \phi_i = t_i$ et $\tan \phi = k$

avec ϕ et $\phi_i \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc d'après la question 1)

$$\tan 3\phi_i = k = \tan \phi$$

On a donc $3\phi_i = \phi + k_i\pi, k_i \in \mathbb{Z}$.

Cherchons les valeurs possibles de k_i :

$$-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} < k_i\pi = 3\phi_i - \phi < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \text{ et } -2\pi < k_i\pi < 2\pi, \text{ donc } -2 < k_i < 2$$

donc $k_i \in \{-1, 0, 1\}$.

Comme ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 sont 2 à 2 distincts, quitte à renuméroter on peut supposer $\phi_1 < \phi_2 < \phi_3$.

$$\text{Dans ce cas, } \phi_1 = \frac{\phi - \pi}{3}, \phi_2 = \frac{\phi}{3}, \phi_3 = \frac{\phi + \pi}{3}$$

(Δ_{t_i}) est de pente $t_i = \tan \phi_i$.

On voit que l'angle entre les droites (Δ_{t_1}) et (Δ_{t_2}) est $\frac{\pi}{3}$. De même, l'angle entre (Δ_{t_1}) et (Δ_{t_3}) et l'angle entre (Δ_{t_2}) et (Δ_{t_3}) est $\frac{\pi}{3}$ (tous les calculs d'angle entre deux droites se font bien sûr modulo π).

Le triangle $M_1M_2M_3$ est donc équilatéral.

b) $(\Delta_{t_i}) : t_i^2x - t_iy + \frac{p}{2} = 0$.

$$M_3 \in (\Delta_{t_1}) \cap (\Delta_{t_2}) \text{ donc } \begin{cases} t_1^2x_3 - t_1y_3 + \frac{p}{2} = 0 & : L_1 \\ t_2^2x_3 - t_2y_3 + \frac{p}{2} = 0 & : L_2 \end{cases}$$

On fait la différence: $t_2 \times L_1 - t_1 \times L_2$.

$$\text{On obtient: } (t_2t_1^2 - t_1t_2^2)x_3 + \frac{p}{2}(t_2 - t_1) = 0$$

$$t_2t_1(t_1 - t_2)x_3 + \frac{p}{2}(t_2 - t_1) = 0. \text{ Comme } t_1 \neq t_2, \text{ on obtient}$$

$$x_3 = \frac{p}{2t_1t_2}$$

On en déduit que

$$y_3 = \frac{p}{2t_1} + t_1x_3 = \frac{p}{2t_1} + \frac{p}{2t_2} = \frac{p}{2}(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2})$$

Par symétrie on obtient:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{p}{2t_1t_3} & y_2 &= \frac{p}{2}(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_3}) \\ x_1 &= \frac{p}{2t_2t_3} & y_1 &= \frac{p}{2}(\frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}) \end{aligned}$$

7. t_1, t_2, t_3 sont les racines du polynôme $X^3 - 3kX^2 - 3X + k$, donc

$$X^3 - 3kX^2 - 3X + k = (X - t_1)(X - t_2)(X - t_3)$$

En développant ce produit on obtient $X^3 - (t_1 + t_2 + t_3)X^2 + (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)X - t_1t_2t_3$

En identifiant les coefficients on obtient

$$t_1 + t_2 + t_3 = 3kt_1t_2 + t_3t_1 + t_2t_3 = -3t_1t_2t_3 = -k$$

.

8.

a) On a : $x(G) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ et $y(G) = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$ donc

$$\begin{aligned} x(G) &= \frac{1}{3} \times \frac{p}{2} \times \left(\frac{1}{t_2t_3} + \frac{1}{t_1t_3} + \frac{1}{t_1t_2} \right) \\ &= \frac{p}{6} \frac{t_1 + t_2 + t_3}{t_1t_2t_3} \\ &= \frac{p}{6} \frac{3k}{-k} \\ &= -\frac{p}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(G) &= \frac{1}{3} \times \frac{p}{2} \times \left(\frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2} + \frac{2}{t_3} \right) \\ &= \frac{p}{3} \frac{t_1t_2 + t_3t_1 + t_2t_3}{t_1t_2t_3} \\ &= \frac{p}{3} \frac{-3}{-k} \\ &= \frac{p}{k}. \end{aligned}$$

Donc $G = (-\frac{p}{2}, \frac{p}{k})$.

b) Lorsque k décrit $\mathbb{R}^*$, G décrit $(D) \setminus \{(-\frac{p}{2}, 0)\}$.