

Concours Général 2002: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Problème 2

Pour $k = 0 \cdots n$, on a : $P^{(k)}(x) = n(n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k}$. Et par la formule du binôme de Newton, $P(x+h) = (x+h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} h^k$
 $P(x+h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(x)$

1) $B_0 = 1$

$$B_0 + 2B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = -\frac{1}{2}$$

$$B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \Rightarrow B_2 = -\frac{1}{3}(1 - \frac{3}{2}) = \frac{1}{6}$$

$$B_0 + 4B_1 + 6B_2 + 4B_3 = 0 \Rightarrow B_3 = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0$$

$$B_0 + 5B_1 + 10B_2 + 10B_3 + 5B_4 = 0 \Rightarrow B_4 = -\frac{1}{5}(1 - \frac{5}{2} + \frac{5}{3}) = -\frac{1}{30}$$

$$B_0 + 6B_1 + 15B_2 + 20B_3 + 15B_4 + 6B_5 = 0 \Rightarrow B_5 = -\frac{1}{6}(1 - 3 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) = 0$$

Pour montrer que B_n est rationnel pour tout entier naturel n , on raisonne par récurrence : $B_0 = 1$ est rationnel. pour montrer que B_{n+1} est rationnel, on va supposer que B_k est rationnel pour $k \leq n$. $B_{n+1} = -\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} B_k$. Tous les termes de la somme sont dans $\mathbb{Q}$, donc B_{n+1} est dans $\mathbb{Q}$. Ce qui achève la récurrence.

2)

a)

Lemme 1. Pour tout α et $k \geq 0$, on a :

$$k \binom{\alpha}{k} = \alpha \binom{\alpha-1}{k-1} \text{ avec pour convention } \binom{\alpha-1}{k-1} = 0 \text{ si } \alpha = 0 \text{ ou } k = 0.$$

En utilisant successivement ce lemme, on obtient :

$$\frac{d}{dx} B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{k} B_k \frac{d}{dx} (x^{\alpha-k}) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{k} B_k x^{\alpha-k-1} (\alpha-k) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{\alpha-k} B_k x^{\alpha-k-1} (\alpha-k)$$

$$\frac{d}{dx} B_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \alpha \binom{\alpha-1}{\alpha-k-1} B_k x^{\alpha-1-k} = \sum_{k=0}^{\alpha-1} \alpha \binom{\alpha-1}{\alpha-k-1} B_k x^{\alpha-1-k} = \alpha \sum_{k=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha-1}{k} B_k x^{\alpha-1-k}$$

$$\frac{dB_\alpha}{dx}(x) = \alpha B_{\alpha-1}(x)$$

b) On va montrer par récurrence sur $p \geq 1$ que

$$\frac{d^p B_\alpha}{dx^p}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1) B_{\alpha-p}(x)$$

C'est vrai pour $p = 1$.

Supposons que c'est vrai pour p ; montrons le pour $p+1$:

$$\frac{d^{p+1} B_\alpha}{dx^{p+1}}(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^p B_\alpha}{dx^p}(x) \right) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1) \frac{d}{dx} B_{\alpha-p}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-p+1) (\alpha-p) B_{\alpha-p-1}(x).$$

Donc c'est vrai au rang $p + 1$.

On en conclue que pour $p \leq \alpha$: $\frac{d^p B_\alpha}{dx^p}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - p + 1) B_{\alpha-p}(x) = p! \binom{\alpha}{p} B_{\alpha-p}(x)$

3) Soient $x, h \in \mathbb{R}$:

$$B_\alpha(x+h) = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{d^k B_\alpha(x)}{dx^k} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} B_{\alpha-k}(x) h^k$$

4) Calcul des premiers B_α

$$\begin{aligned} - B_1(x) &= \binom{1}{0} B_0 x + \binom{1}{1} B_1 = x - \frac{1}{2} \\ - B_2(x) &= \binom{2}{0} B_0 x^2 + \binom{2}{1} B_1 x + \binom{2}{2} B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6} \\ - B_3(x) &= \binom{3}{0} B_0 x^3 + \binom{3}{1} B_1 x^2 + \binom{3}{2} B_2 x + \binom{3}{3} B_3 = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{x}{2} \\ - B_4(x) &= \binom{4}{0} B_0 x^4 + \binom{4}{1} B_1 x^3 + \binom{4}{2} B_2 x^2 + \binom{4}{3} B_3 x + \binom{4}{4} B_4 = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{3}x \\ - B_5(x) &= \binom{5}{0} B_0 x^5 + \binom{5}{1} B_1 x^4 + \binom{5}{2} B_2 x^3 + \binom{5}{3} B_3 x^2 + \binom{5}{4} B_4 x + \binom{5}{5} B_5 = x^5 - \frac{5}{2} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{1}{6} x \end{aligned}$$

5) Posons pour $\alpha \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $Q_\alpha(x) = B_\alpha(x+1) - B_\alpha(x)$.

On va montrer par récurrence sur $k \leq \alpha$ que pour $k \leq \alpha$, $\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} Q_\alpha(x) = \frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}} (\alpha x^{\alpha-1})$
Pour celà, on va utiliser un lemme :

Lemme 2. Si f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et vérifient $f' = g'$ et $f(a) = g(a)$ alors pour tout $x \in I$, $f(x) = g(x)$. On dit en gros que deux fonctions réelles C^1 sont égales si leurs dérivées sont égales et si leur évaluation en un point coïncide.

Démonstration. La preuve est triviale. On écrit $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x g'(t) dt = g(x) - g(a)$, ce qui nous donne $f(x) = g(x)$ $\square$

Pour $k = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} Q_\alpha(x) &= \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} B_\alpha(x+1) - \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} B_\alpha(x) \\ &= (\alpha-1)! \binom{\alpha}{\alpha-1} (B_1(x+1) - B_1(x)) \\ &= \alpha! \times 1 \\ &= \alpha! \\ \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} Q_\alpha(x) &= \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} (\alpha x^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} Q_\alpha(x) \Big|_{x=0} &= \frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}} \Big|_{x=0} (B_\alpha(x+1) - B_\alpha(x)) = (\alpha-1-k)! \binom{\alpha}{k+1} (\sum_{p=0}^{k+1} \binom{k+1}{p} B_p - B_{k+1}) \\ &= (\alpha-1-k)! \binom{\alpha}{k+1} (\sum_{p=0}^k \binom{k+1}{p} B_p) = 0 \end{aligned}$$

Supposons le résultat pour un k vérifiant $1 \leq k \leq \alpha - 1$. Montrons que le résultat est vrai pour $k + 1$.

$$\frac{d^{\alpha-k-1}}{dx^{\alpha-k-1}}|_{x=0}Q_{\alpha}(x) = \frac{d^{\alpha-k-1}}{dx^{\alpha-k-1}}|_{x=0}(B_{\alpha}(x+1) - B_{\alpha}(x)) \text{ Or } \frac{d^{\alpha-k-1}}{dx^{\alpha-k-1}}|_{x=0}B_{\alpha}(x) = (\alpha-1-k)! \binom{\alpha}{k+1} B_{k+1}(0).$$

De la même manière $\frac{d^{\alpha-k-1}}{dx^{\alpha-k-1}}|_{x=0}B_{\alpha}(x+1) = (\alpha-1-k)! \binom{\alpha}{k+1} B_{k+1}(1)$ On en tire $\frac{d^{\alpha-k-1}}{dx^{\alpha-k-1}}|_{x=0}(B_{\alpha}(x+1) - B_{\alpha}(x)) = (\alpha-1-k)! \binom{\alpha}{k+1} (B_{k+1}(1) - B_{k+1}(0)) = 0$ d'après le calcul fait dans le cas $k=1$.

$$\text{D'autre part, } \frac{d^{\alpha-k-1}}{dx^{\alpha-k-1}}|_{x=0}(\alpha x^{\alpha-1}) = \alpha(\alpha-1) \cdots (k+1)x^k|_{x=0} = 0$$

Donc le résultat est vrai au rang $k+1$. Ce qui achève la récurrence.

Et en prenant $k = \alpha$:

$$B_{\alpha}(x+1) - B_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

6)

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad S_{\alpha}^n &= \sum_{k=1}^{n-1} k^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{k=1}^{n-1} (B_{\alpha+1}(k+1) - B_{\alpha+1}(k)) = \frac{1}{\alpha+1} (B_{\alpha+1}(n) - B_{\alpha+1}(1)) \\ - \alpha = 1 : S_1^n &= \frac{1}{2} (B_2(n) - B_2(1)) = \frac{1}{2} (n^2 - n) = \frac{1}{2} n(n-1) \text{ qui est une formule qu'on connaît bien.} \\ - \alpha = 2 : S_2^n &= \frac{1}{3} (B_3(n) - B_3(1)) = \frac{1}{3} (n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2}) = \frac{n}{6} (2n^2 - 3n + 1) = \frac{n(2n-1)(n-1)}{6} \\ &\text{qui est aussi une formule bien connue de la somme des carrés d'entiers consécutifs.} \\ - \alpha = 3 : S_3^n &= \frac{1}{4} (B_4(n) - B_4(1)) = \frac{1}{4} (n^4 - 2n^3 + n^2) = \frac{n^2}{4} (n^2 - 2n + 1) = \frac{n^2(n-1)^2}{4} \\ - \alpha = 4 : S_4^n &= \frac{1}{5} (B_5(n) - B_5(1)) = \frac{1}{5} (n^5 - \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{n}{6}) \end{aligned}$$

b) En prenant $h=1$ dans l'expression de 3) on obtient

$$\sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{s} B_s(x) = B_{\alpha}(x+1) - B_{\alpha}(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

En remplaçant α par $\alpha+1$ dans l'expression précédente, on obtient

$$\sum_{s=0}^{\alpha} \binom{\alpha+1}{s} B_s(x) = (\alpha+1)x^{\alpha}(\alpha+1)B_{\alpha}(x) + \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{s} B_s(x) = (\alpha+1)x^{\alpha}$$

donc

$$B_{\alpha}(x) = x^{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} \sum_{s=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha+1}{s} B_s(x)$$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit } B_6(x) &= x^6 - \frac{1}{7} (B_0(x) + 7B_1(x) + 21B_2(x) + 35B_3(x) + 35B_4(x) + 21B_5(x)) \\ &= x^6 - \frac{1}{7} - (x - \frac{1}{2}) - 3(x^2 - x + \frac{1}{6}) - 5(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}) - 5(x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{3}) - 3(x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{x}{6}) \\ &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{32}{35} \text{ On en déduit le calcul de } S_5^n \\ S_5^n &= \frac{1}{6} (B_6(n) - B_6(1)) = \frac{1}{6} (n^6 - 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2) \end{aligned}$$