

Concours général sénégalais 96 :Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Daaramath

4 septembre 2009

Introduction

On veut étudier dans ce problème une équation fonctionnelle $f(xy) = f(x) + f(y)$, $x, y > 0$. En donnant à f une certaine régularité, à savoir continuité en tout point et la dérivabilité en un point x_0 ($x_0 = 1$ par exemple), on parvient à montrer que f est un logarithme. Une propriété clé est que la dérivabilité en un point entraîne la dérivabilité en tout point (la continuité sur tout le domaine étant supposé). A la fin du problème, on déduit une approximation de $\ln x$ par une suite dont l'expression ne fait figure que des racines n-ièmes : $\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Partie A

A - 1)

Soit $r \geq -1$. Par récurrence sur n montrons que $(1+r)^n \geq 1+nr$.

Si $n = 1$: $(1+r)^1 = 1+r$ donc c'est vrai.

Supposons le résultat vrai au rang n : $(1+r)^n \geq 1+nr$.

On multiplie les deux membres par $1+r \geq 0$.

$$(1+r)^{n+1} \geq (1+nr)(1+r) = 1+nr+r+nr^2 \geq 1+(n+1)r.$$

donc le résultat est vrai au rang $n+1$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall r \geq -1, (1+r)^n \geq 1+nr \quad (1)$$

A - 2)

Soit $s \geq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $r = \frac{1}{s} - 1 \geq -1$

On applique l'inégalité précédente : $(1+r)^{n+1} \geq 1+(n+1)r$

$$\frac{1}{s^{n+1}} \geq 1+(n+1)\left(\frac{1}{s} - 1\right)$$

On multiplie les deux membres par $s^{n+1} \geq 0$

$$1 \geq s^{n+1} + (n+1)(s^n - s^{n+1}) \text{ donc}$$

$$ns^{n+1} + 1 \geq (n+1)s^n \quad (2)$$

A - 3)

a) Soit $x \geq 1$ et $n_0 = E\left(\frac{x-1}{\epsilon}\right) + 1$ avec $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$

On a par définition $\frac{x-1}{\epsilon} < E\left(\frac{x-1}{\epsilon}\right) + 1 = n_0$

donc $x < 1 + \epsilon n_0$

Soit donc $n \geq n_0$ En utilisant le fait que $y \mapsto \sqrt[n]{y}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on

a :

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{1+n\epsilon} \leq \sqrt[n]{(1+\epsilon)^n} = 1+\epsilon$$

donc

$$1 \leq \sqrt[n]{x} < 1+\epsilon$$

b)

Soit $0 < x < 1$

On applique A - 3 - a) à $\frac{1}{x} > 1$

$$1 \leq \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}} < 1+\epsilon$$

donc

$$\frac{1}{1+\epsilon} < \sqrt[n]{x} \leq 1$$

A - 4)

Soit $x \geq 1$, pour $n > 0$, on pose $v_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$. On pose $s = \sqrt[n(n+1)]{x} (\geq 1)$ comme indiqué et on utilise (2)

$$ns^{n+1} + 1 \geq (n+1)s^n$$

$$n\sqrt[n]{x} + 1 \geq (n+1)\sqrt[n+1]{x}$$

on retranche $n+1$ aux deux membres de l'inégalité :

$$n\sqrt[n]{x} - n = v_n(x) \geq (n+1)\sqrt[n+1]{x} - (n+1) = v_{n+1}(x)$$

donc $(v_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante.

On a de plus $v_1(x) = x - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $x = 1$, il est clair que $v_n(x) = 0$ donc $0 = \frac{x-1}{x} \leq v_n(x) \leq x - 1 = 0$

- Si $x > 1$ On pose $a = \sqrt[n]{x}$ donc $x = a^n$ il suffit de montrer que $\frac{x-1}{x-1}v_n(x) \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1}v_n(x) &= \frac{na^n(a-1)}{a^n-1} \\ &= \frac{na^n(a-1)}{(a-1)(a^{n-1} + \dots + a + 1)} \\ &= \frac{na^n}{a^{n-1} + \dots + a + 1} \end{aligned}$$

or pour $0 \leq k \leq n-1, a^n \geq a^k$ (car $a > 1$)

donc $na^n \geq a^{n-1} + \dots + a + 1$ d'où $\frac{x-1}{x-1}v_n(x) \geq 1$

On a donc

$$\forall x \geq 1, \frac{x-1}{x} \leq v_n(x) \leq x-1 \quad (4)$$

A - 5)

a)

Soit $x \geq 1$

La suite $(v_n(x))_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par $\frac{x-1}{x}$ donc elle converge. et on a, en passant à la limite dans (4)

$$\frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \leq x-1$$

b)

Soit $0 < x \leq 1$ et soit $n \geq 1$. On a $\frac{1}{x} \geq 1$

$$\begin{aligned} v_n\left(\frac{1}{x}\right) &= n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{x}} - 1\right) \\ &= \frac{n}{\sqrt[n]{x}}(1 - \sqrt[n]{x}) \\ &= \frac{-v_n(x)}{\sqrt[n]{x}} \end{aligned}$$

On voit donc que la suite $(v_n(\frac{1}{x}))_{n \geq 1}$ converge vers

$$-\frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x)}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x}} = -\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x)$$

c)

Soit $0 < x < 1$.

D'après 5) appliquée à $\frac{1}{x}$:

$$\frac{\frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x}} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1$$

$$1 - x \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

Et en prenant les opposés, on change le sens des inégalités :

$$\frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n\left(\frac{1}{x}\right) \leq x-1$$

Partie B

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction vérifiant (7) i.e $\forall x, y \in D, f(xy) = f(x) + f(y)$

$B-1)$ $D = \mathbb{R}$

Soit f une fonction vérifiant (7)

On a d'une part : $f(0.0) = f(0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$

d'autre part : pour $x \in \mathbb{R}, f(x.0) = f(0) = 0 = f(x) + f(0) = f(x)$

donc $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ d'où $f = 0$

$B-2)$

$D = \mathbb{R}^*$

On a de même : $f(1.1) = f(1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 0$

$f((-1)^2) = f(1) = 0 = f(-1) + f(-1)$ donc $f(-1) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^* . -x \in \mathbb{R}^*$ et $f(-x) = f(-1) + f(x) = f(x)$ donc f est une fonction paire.

Il suffit donc de restreindre l'étude sur $D = \mathbb{R}_+^*$

$B-3)$

Dans toute la suite, $D = \mathbb{R}_+^*$

Soit f une fonction constante sur D et non nulle.

$f(1) \neq 0$ donc f ne vérifie pas (7)

Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur $D = \mathbb{R}_+^*$, non nulles, non constantes, dérivables et vérifiant (7)

$B-4)$

Soit $f \in \mathcal{F}$ et soit $x \in D$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(x^n) = nf(x)$

On a $f(x^0) = f(1) = 0 = 0.f(x)$

Supposons que le résultat est vrai au rang n : $f(x^n) = nf(x)$

$f(x^{n+1}) = f(x.x^n) = f(x) + f(x^n) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$, ce qui achève la récurrence.

On a donc

$$\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N}, f(x^n) = nf(x) \quad (8)$$

ou en remplaçant x par $\sqrt[n]{x}$ on a :

$$f(x) = nf(\sqrt[n]{x}) \quad (9)$$

$B-5)$

Soit $x > 0$

Soit $\begin{array}{ccc} g : D & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & f(xy) \end{array}$

g est dérivable sur D comme composée de f et $y \mapsto xy$ et sa dérivée en $y \in D$ est $g'(y) = xf'(xy)$

D'autre part $\forall y \in D, g(y) = f(x) + f(y)$ donc en dérivant :
 $g'(y) = f'(y)$; on prend $y = 1$: $g'(1) = xf'(x) = f'(1)$ donc

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{x} \quad (10)$$

$B - 6)$

Soit $f \in \mathcal{F}$

Si $f'(1) = 0$, on a $\forall x > 0, f'(x) = 0$ donc f est une fonction constante, ce qui est exclu donc $f'(1) \neq 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Montrons que $\lambda.f \in \mathcal{F}$

$\lambda.f$ est non constante, dérivable sur D et pour $x, y \in D, (\lambda.f)(xy) = \lambda.f(xy) = \lambda(f(x) + f(y)) = (\lambda.f)(x) + (\lambda.f)(y)$ donc $\lambda.f$ vérifie (7)

En conclusion $\lambda.f \in \mathcal{F}$

En multipliant f par $\lambda = \frac{1}{f'(1)}$, on se ramène à $f'(1) = 1$

Dans la suite on suppose que $f'(1) = 1$

$B - 7)$

Pour $t \in D - 1, \frac{f(t)}{t-1} = \frac{f(t)-f(1)}{t-1} \rightarrow_{t \rightarrow 1} f'(1) = 1$

Partie C

$C - 1)$

Soit x et $y > 0$

a)

D'après $A - 5)a)$ et $c)$ on a

$$\frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = f(x) \leq x-1$$

b)

$f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ d'après (6)

c)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} v_n(xy) &= n [\sqrt[n]{xy} - 1] \\ &= n [(\sqrt[n]{x} - 1) \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{y} - 1] \\ &= v_n(x) \sqrt[n]{y} + v_n(y) \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \end{aligned}$$

$$f(x).1 + f(y)$$

donc $f(xy) = f(x) + f(y)$

d)

- Si $n \geq 0$, on a $f(x^n) = nf(x)$

- Si $n < 0, n = -|n|$ $f(x^n) = f(\frac{1}{x^{|n|}}) = -f(x^{|n|}) = -|n|f(x) = nf(x)$

donc

$$\forall n \in \mathbb{Z}, f(x^n) = nf(x)$$

$C - 2)$

Soit $x, y \in D = \mathbb{R}_+^*$ avec $x > y$. Montrons que $f(x) > f(y)$

$$f(x) - f(y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

Or d'après $C - 1 - a$, $\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{y}{x}} \leq f\left(\frac{x}{y}\right)$

donc $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq \frac{x-y}{x} > 0$

d'où $f(x) - f(y) > 0$ donc f est strictement croissante sur D

b) Soit $x \in D$

– si $0 < x < 1$: d'après $C - 1 - a$) $1 \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{1}{x}$ donc

$$\left| \frac{f(x)}{x-1} - 1 \right| = \frac{f(x)}{x-1} - 1 \leq \frac{1}{x} - 1 = \left| \frac{1}{x} - 1 \right|$$

– si $x > 1$; toujours d'après $C - 1 - a$),

$$\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq 1$$

donc

$$\left| \frac{f(x)}{x-1} - 1 \right| = 1 - \frac{f(x)}{x-1} \leq 1 - \frac{1}{x} = \left| \frac{1}{x} - 1 \right|$$

donc si

$$x \in D \setminus \{1\}, 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(1)}{x-1} - 1 \right| \leq \left| \frac{1}{x} - 1 \right|$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{f(x) - f(1)}{x-1} - 1 \right| = 0$$

(par le lemme des gendarmes pour les fonctions) donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1$$

f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$

c)

Soit $x > 0$

Pour $y \in D \setminus x$, on a :

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{x\left(\frac{y}{x}-1\right)} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} \left| \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}-1} - 1 \right|$$

et en faisant le changement de variable $t = \frac{y}{x}$ et sachant que $y \rightarrow x$ ssi $t \rightarrow 1$

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y-x} - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} \left| \frac{f(t)}{t-1} - 1 \right| \xrightarrow{y \rightarrow x} \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{x} \left| \frac{f(t)}{t-1} - 1 \right| = 0$$

donc f est dérivable en x et $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque 1. Ici on voit que la propriété de dérivation de f en 1 se propage à tous les autres points de D .

Le lecteur est invité à consulter le sujet du CGS de 2003 portant sur l'équation fonctionnelle $f(xy) = f(x)f(y)$ des fonctions exponentielles. Dans le cas de l'exponentielle c'est la régularité au point 0 qui se propage à tous les autres réels.

d)

1)

$\forall t > 0$ on a $f'(t) = \frac{1}{t}$ donc f' est continue sur D donc f est C^1 sur D . On a :

$$f(2) = f(2) - f(1) = \int_1^2 f'(t) dt = \int_1^2 \frac{dt}{t}$$

Or si $1 \leq t \leq 2, \frac{1}{t} \geq \frac{1}{2}$

donc

$$f(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t} \geq \int_1^2 \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}$$

2)

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^* = D$

donc

$$\forall x > 2^p, f(x) > f(2^p) = pf(2) \geq \frac{p}{2}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

En effet soit M un nombre positif quelconque ; on va trouver $x_0 \in D$ tel que $\forall x \geq x_0, f(x) \geq M$.

Soit p un entier tel que $\frac{p}{2} \geq M$ (par exemple $p = E(2M) + 1$) ; on prend $x_0 = 2^p$

on a alors

$$\forall x \geq x_0, f(x) \geq \frac{p}{2} \geq M$$

De même, si $x < 2^{-p}$ ($p > 0$)

$$f(x) < f(2^{-p}) = -pf(2) \leq -\frac{p}{2}$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

En effet soit M un nombre positif quelconque ; on va trouver $\epsilon \in D$ tel que $\forall x \leq \epsilon, f(x) \leq -M$.

Soit p un entier tel que $\frac{p}{2} \geq M$ (par exemple $p = E(2M) + 1$) ; on prend $\epsilon = 2^{-p}$. On a alors

$$\forall x/0 < x \leq \epsilon, f(x) \leq -\frac{p}{2} \leq -M$$

CQFD

Remarque 2. On pouvait aussi utiliser la relation fonctionnelle pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

En posant $X = \frac{1}{x}; X \rightarrow +\infty$ ssi $x \rightarrow 0^+$.

Pour $x > 0, f(x) = -f(X) \rightarrow_{X \rightarrow +\infty} -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

.