

Concours Général Sénégalais 99 :Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée : 6 heures

Introduction

On étudie ici les fractions continues. C'est un sujet très à la mode au Concours Général Sénégalais. Après avoir traité ce sujet, il est recommandé de s'attaquer au sujet de 2001.

0.1 Généralités sur les fractions continues

1

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$[a_0, x] = a_0 + 1/x = \frac{xa_0+1}{x} = \frac{p_1x+p_0}{q_1x+q_0}.$$

Supposons le résultat vrai au rang $n \geq 0$ c'est-à-dire :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, [a_0, \dots, a_n, y] = \frac{p_{n+1}y+p_n}{q_{n+1}y+q_n}.$$

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, x] &= f_0 \circ \dots \circ f_{n+1}(x) \\ &= f_0 \circ \dots \circ f_n(a_{n+1} + 1/x) \\ &= [a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + 1/x] \\ &\stackrel{H.R.}{=} \frac{p_{n+1}(a_{n+1} + 1/x) + p_n}{q_{n+1}(a_{n+1} + 1/x) + q_n} \\ &= \frac{(a_{n+1}p_{n+1} + p_n)x + p_{n+1}}{(a_{n+1}q_{n+1} + q_n)x + p_{n+1}} \\ &= \frac{p_{n+2}x + p_{n+1}}{q_{n+2}x + q_{n+1}} \end{aligned}$$

CQFD

b) On va commencer par démontrer un résultat utile :

Lemme 1. $\forall n > 0, q_n > 0$

Preuve. En effet $q_1 = 1$ et $q_2 = a_1q_1 + q_0 = a_1q_1 > 0$.

Supposons que $q_n > 0$ et $q_{n-1} > 0$ on a : $q_{n+1} = a_nq_n + q_{n-1} > 0$. □

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $x > 0$.

$$[a_0, \dots, a_n, x] = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + 1/x] = f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}(a_n + 1/x).$$

Les f_k sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}(a_n + 1/x) = f_0 \circ \dots \circ f_{n-1}(a_n) = [a_0, \dots, a_n]$$

D'autre part

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [a_0, \dots, a_n, x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_{n+1}x + p_n}{q_{n+1}x + q_n} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

d'où

$$r_n = [a_0, \dots, a_n] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.$$

2.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$p_{n+1}q_{n+2} - q_{n+1}p_{n+2} = p_{n+1}(a_{n+1}q_{n+1} + q_n) - q_{n+1}(a_{n+1}p_{n+1} + p_n) = p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n.$$

Et en posant $b_n = p_nq_{n+1} - q_np_{n+1}$, on obtient : $b_{n+1} = -b_n$ donc $b_n = (-1)^n b_0$ et $b_0 = p_0q_1 - q_0p_1 = 1$.

$$p_nq_{n+1} - q_np_{n+1} = (-1)^n$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} p_nq_{n+2} - q_np_{n+2} &= p_n(a_{n+1}q_{n+1} + q_n) - q_n(a_{n+1}p_{n+1} + p_n) \\ &= a_{n+1}(p_nq_{n+1} - q_np_{n+1}) \\ p_nq_{n+2} - q_np_{n+2} &= a_{n+1}(-1)^n \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} r_{2n} - r_{2n+2} &= \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n+3}}{q_{2n+3}} \\ &= \frac{p_{2n+1}q_{2n+3} - q_{2n+1}p_{2n+3}}{q_{2n+1}q_{2n+3}} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}a_{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+3}} \\ &= \frac{-a_{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+3}} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{2n+1} - r_{2n+3} &= \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n+4}}{q_{2n+4}} \\ &= \frac{p_{2n+2}q_{2n+4} - q_{2n+2}p_{2n+4}}{q_{2n+2}q_{2n+4}} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}a_{2n+3}}{q_{2n+2}q_{2n+4}} \\ &= \frac{a_{2n+3}}{q_{2n+2}q_{2n+4}} > 0 \end{aligned}$$

donc (r_{2n}) est strictement $\nearrow$ et (r_{2n+1}) est strictement $\searrow$.

$$\begin{aligned}
 r_{2n} - r_{2n+1} &= \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} \\
 &= \frac{p_{2n+1}q_{2n+2} - q_{2n+1}p_{2n+2}}{q_{2n+1}q_{2n+2}} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+1}}{q_{2n+1}q_{2n+2}} \\
 &= \frac{-1}{q_{2n+1}q_{2n+2}} < 0
 \end{aligned}$$

donc

$$r_{2n} < r_{2n+1}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$r_n - [a_0, \dots, a_n, x] = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_{n+1}x + p_n}{q_{n+1}x + q_n}$$

et en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
 r_n - [a_0, \dots, a_n, x] &= \frac{p_{n+1}q_{n+1}x + p_{n+1}q_n - p_{n+1}q_{n+1}x - q_{n+1}p_n}{q_{n+1}(q_{n+1}x + q_n)} \\
 &= \frac{p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n}{q_{n+1}(q_{n+1}x + q_n)} \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}(q_{n+1}x + q_n)} \\
 |r_n - [a_0, \dots, a_n, x]| &= \frac{1}{q_{n+1}(q_{n+1}x + q_n)}
 \end{aligned}$$

Partie 2 : Développement en fractions continues

1 Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après 1 - 2 - a), $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^n$.

Soit $d \in \mathbb{Z}^*$ un diviseur commun de p_n et q_n , alors d divise $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^n$. Or les seuls diviseurs de $(-1)^n$ sont 1 et -1 donc $d = \pm 1$.

On en conclut que p_n et q_n sont premiers entre eux.

2.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$q_{n+2} - q_{n+1} = \underbrace{(a_{n+1} - 1)}_{>0} q_{n+1} + q_n > 0$$

donc $q_{n+2} > q_{n+1}$ et $q_1 > q_0$ et $(q_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante.

Soit $n \geq 2$, $q_{n+1} - q_n \in \mathbb{N}^*$ donc $q_{n+1} - q_n \geq 1$.

On utilise une petite astuce qu'il vaut mieux retenir. Elle est très utilisée pour avoir une écriture d'une suite quelconque en termes de sommes :

$$q_n - q_2 = \sum_{k=2}^{n-1} (q_{k+1} - q_k) \geq \sum_{k=2}^{n-1} 1 = n - 1.$$

On a alors : $q_n \geq q_2 + n - 1$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty.$$

b) On a :

$$\forall n \geq 0, r_0 \leq r_{2n} < r_{2n+1} \leq r_1.$$

(r_{2n+1}) est $\searrow$ et minorée par r_0 donc (r_{2n+1}) converge vers un réel α .

(r_{2n}) est $\nearrow$ et majorée par r_1 donc (r_{2n}) converge vers un réel β .

De plus, $\forall n \geq 0, r_{2n} - r_{2n+1} = \frac{-1}{q_{2n+1}q_{2n+2}}$ d'après le calcul fait en 1 - 3). Donc, en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$: $\alpha - \beta = 0$.

D'où (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes de limite commune $\alpha = \beta = t = t(a)$.

3.

a) On a, pour $n \geq 0$:

$$0 \leq t - r_{2n} \leq r_{2n+1} - r_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n+2}}$$

car (r_{2n+1}) est $\searrow$ et (r_{2n}) est $\nearrow$ donc

$$|t - r_{2n}| = t - r_{2n} \leq \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n+2}}.$$

De même

$$0 \leq r_{2n+1} - t \leq r_{2n+1} - r_{2n} = \frac{1}{q_{2n+1}q_{2n+2}} \leq \frac{1}{q_{2n+2}q_{2n+3}}$$

par croissance de (q_n) donc

$$|t - r_{2n+1}| = r_{2n+1} - t \leq \frac{1}{q_{2n+2}q_{2n+3}}$$

l'inégalité est donc valable pour les entiers pairs et impairs, et par conséquent pour tout entier.

$$\forall n \geq 0, |t - r_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}.$$

D'autre part, pour $n \geq 0$: $\left|t - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}$ donc $|q_{n+1}t - p_{n+1}| \leq \frac{1}{q_{n+2}}$ et $\forall n \geq 1, |q_n t - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}} < \frac{1}{q_n}$.

De plus, $\forall n \geq 0, r_n \neq t$ car (r_{2n}) est strictement $\nearrow t$ et (r_{2n+1}) est strictement $\searrow t$, donc $0 < |t - r_{n-1}| = \left|t - \frac{p_n}{q_n}\right|$ pour $n \geq 1$.

$$\forall n \geq 1, 0 < |q_n t - p_n| < \frac{1}{q_n}.$$

b) Supposons par l'absurde que t est rationnel. On écrit $t = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$. On a : $\forall n \geq 1, 0 < |q_n a/b - p_n| < \frac{1}{q_n}$ donc et $\forall n \geq 1, 0 < |q_n a - b p_n| < \frac{b}{q_n}$.

Comme $q_n \rightarrow +\infty_{n \rightarrow +\infty}$, on peut choisir n_0 entier assez grand tel que $\frac{b}{q_{n_0}} < 1$.

On a alors $0 < |q_{n_0} a - b p_{n_0}| < \frac{b}{q_{n_0}} < 1$, donc $|q_{n_0} a - b p_{n_0}|$ est un entier naturel strictement compris entre 0 et 1, ce qui n'existe pas.

Donc t est irrationnel.

4.

a) Soit $n \geq 1$: $[a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]}$ et en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$t = a_0 + 1/t_1$$

b) Soit $n \geq 2$.

$$a_0 + \frac{1}{[a_1, \dots, a_n]} = [a_0, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{[a_2, \dots, a_n]}}$$

en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$a_0 < a_0 + \frac{1}{t_1} = t = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{t_2}} < a_0 + \frac{1}{a_1}$$

donc $a_0 < t < a_0 + 1$ d'où

$$a_0 = E(t)$$

c) Soit $p \in \mathbb{N}$. En remplaçant a_n par $a'_n = a_{n+p}$ et t par t_p , on obtient de même $a_p = E(t_p)$.

Soit $n \geq p+1$: $[a_p, \dots, a_n] = a_p + \frac{1}{[a_{p+1}, \dots, a_n]}$ et,
en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$t_p = a_p + \frac{1}{t_{p+1}}$$

donc

$$t_{p+1} = \frac{1}{t_p - a_p} = \frac{1}{t_p - E(t_p)}$$

5.

a) Soit U un irrationnel.

Pour $n = 0$: $[a_0, U_1] = a_0 + 1/U_1 = a_0 + U_0 - E(U_0) = U_0$.

Supposons le résultat vrai au rang n : $U = [a_0, \dots, a_n, U_{n+1}]$.

On a :

$$\begin{aligned} [a_0, \dots, a_{n+1}, U_{n+2}] &= [a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + 1/U_{n+2}] \\ &= [a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + U_{n+1} - a_{n+1}] \\ &= [a_0, \dots, a_n, U_{n+1}] = U \end{aligned}$$

donc

$$\forall n \geq 0, U = [a_0, \dots, a_n, U_{n+1}]$$

b) D'après 1 – 4 :

$$\begin{aligned} |r_n - U| &= |[a_0, \dots, a_n] - [a_0, \dots, a_n, U_{n+1}]| \\ &= \frac{1}{q_{n+1}(q_{n+1}U_{n+1} + q_n)} \end{aligned}$$

(avec les mêmes notations qu'au 1)). Or $U_{n+1} = \frac{1}{U_n - E(U_n)} > 0$ donc $q_{n+1}U_{n+1} + q_n \geq q_n \geq 1$ pour $n \geq 1$

$$\forall n \geq 1, |r_n - U| = \frac{1}{q_{n+1}(q_{n+1}U_{n+1} + q_n)} \leq \frac{1}{q_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = t(a) = U$$

Partie 3 : Exemples

1.

$$\begin{aligned} U_0 &= \pi, & a_0 &= E(U_0) = 3 \\ U_1 &= \frac{1}{\pi - 3}, & a_1 &= E(U_1) = 7 \\ U_2 &= \frac{1}{U_1 - 7}, & a_2 &= E(U_2) = 15 \\ U_3 &= \frac{1}{U_2 - 15}, & a_3 &= E(U_3) = 1 \\ U_4 &= \frac{1}{U_3 - 1}, & a_4 &= E(U_4) = 292 \end{aligned}$$

On obtient :

$$p_0 = 1 \quad p_1 = 3 \quad p_2 = 7 \times 3 + 1 = 22 \quad p_3 = 15 \times 22 + 3 = 333$$

$$p_4 = 1 \times 333 + 22 = 355$$

$$q_0 = 0 \quad q_1 = 1 \quad q_2 = 7 \times 1 + 0 = 7 \quad q_3 = 15 \times 7 + 1 = 106$$

$$q_4 = 1 \times 106 + 7 = 113 \quad q_5 = 292 \times 113 + 106 = 33102$$

$$r_3 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{355}{113}.$$

D'après $1 - 3 - a$),

$$|\pi - r_3| \leq \frac{1}{q_4 q_5} = \frac{1}{113 \times 33102} \leq 3.10^{-7}$$

Ce qui donne la majoration de l'erreur annoncée dans l'Introduction.

2. On a :

$$\begin{aligned} t &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_0, \dots, a_{k-1}, a_k, \dots, a_{k+n}] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_0, \dots, a_{k-1}, [a_k, \dots, a_{k+n}]] \\ &= \left[a_0, \dots, a_{k-1}, \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_k, \dots, a_{k+n}] \right] \\ &= \left[a_0, \dots, a_{k-1}, \lim_{n \rightarrow +\infty} [a_0, \dots, a_n] \right] \end{aligned}$$

donc

$$t = [a_0, \dots, a_{k-1}, t]$$

3. D'après la question précédente on a :

a) (a_n) est 1-périodique donc $t = [a_0, t] = 1 + \frac{1}{t}$ d'où t est la racine positive de $X^2 - X - 1$ donc

$$t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

b) De même $t = [a_0, t] = 2 + \frac{1}{t}$ d'où t est la racine positive de $X^2 - 2X - 1$ donc

$$t = 1 + \sqrt{2}$$

c) (a_n) est 2-périodique donc

$$t = [a_0, a_1, t] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{t}} = 1 + \frac{t}{2t + 1} = \frac{3t + 1}{2t + 1}$$

d'où t est la racine positive de $2X^2 - 2X - 1$. On a alors :

$$t = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

4.

a) Soit $a \in S'$, k -périodique. Le calcul fait en $1 - 1 - a$) pour t irrationnel à la place de $x > 0$ (on a le droit car les dénominateurs ne s'annulent pas) montre que

$$t = [a_0, \dots, a_{k-1}, t] = \frac{p_k t + p_{k-1}}{q_k t + q_{k-1}}$$

donc

$$q_k t^2 + (q_{k-1} - p_k)t - p_{k-1} = 0$$

b) Si a est k -périodique à partir du rang m : avec la même démonstration qu'au 3 - 2) on obtient :

$$t = [a_0, \dots, a_m, \dots, a_{m+k-1}, t] = \frac{p_{m+k} t + p_{m+k-1}}{q_{m+k} t + q_{m+k-1}}$$

donc $q_{m+k} t^2 + (q_{m+k-1} - p_{m+k})t - p_{m+k-1} = 0$ et t est donc un irrationnel quadratique.

5.

—

$$\begin{aligned} U_0 &= \sqrt{2} & , & & a_0 &= 1 \\ U_1 &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 & & & a_1 &= 2 \\ U_2 &= \frac{1}{U_1 - 2} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = U_1 & & & a_2 &= a_1 = 1 \end{aligned}$$

et on voit que $\forall n \geq 1, U_n = U_1 = \sqrt{2} + 1$ et $a_n = 2$.

– $U_0 = \sqrt{3} \quad a_0 = 1$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} & a_1 &= 1 \\
 U_2 &= \frac{1}{U_1-1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \\
 &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} \\
 &= \sqrt{3}+1 & a_2 &= 2 \\
 U_3 &= \frac{1}{U_2-2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}-1} \\
 &= U_1 & a_3 &= a_1 \\
 U_4 &= \frac{1}{U_3-a_3} \\
 &= \frac{1}{U_1-a_1} \\
 &= U_2 & a_4 &= a_2
 \end{aligned}$$

On voit que $a_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $a_{2n-1} = a_1 = 1$

$a_{2n} = a_2 = 2$.

– $U_0 = \sqrt{10} \quad a_0 = 3$

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{\sqrt{10}-3} \\
 &= \sqrt{10}+3 & a_1 &= 6
 \end{aligned}$$

$$U_2 = \frac{1}{U_1-6} = \frac{1}{\sqrt{10}-3} = U_1 \quad a_2 = a_1 = 6.$$

On voit que $\forall n \geq 1, a_n = 6$ et $a_0 = 3$

–

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \sqrt{1+k^2} & a_0 &= k \\
 U_1 &= \frac{1}{U_0-a_0} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}-k} = \sqrt{1+k^2}+k & a_1 &= 2k
 \end{aligned}$$

On voit que $a_0 = k$ et $\forall n \geq 1, a_n = 2k$.

Partie 4 : Meilleures approximations rationnelles d'un irrationnel

1. Soit n un entier ≥ 2 . On suppose n pair : $n = 2k + 2$. Montrons que $r_{2k} = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \frac{p}{q} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} = r_{2k+1}$

- Si $\frac{p}{q} > U$: $\left|U - \frac{p}{q}\right| \leq \left|U - \frac{p_n}{q_n}\right| = |U - r_{2k+1}|$, donc $\frac{p}{q} - U \leq \frac{p_n}{q_n} - U \quad ((r_{2p+1}) \searrow U)$
d'où $\frac{p}{q} \leq \frac{p_n}{q_n}$.

D'autre part : $\frac{p}{q} > U \geq \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = r_{2k}$ donc

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q} \leq \frac{p_n}{q_n}$$

- Si $\frac{p}{q} < U$: on va commencer par un lemme :

Lemme 2. $\left|U - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|U - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$

Preuve. On calcule

$$\begin{aligned} \left|\frac{p_n}{q_n} - U\right| + \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - U\right| &= \frac{p_n}{q_n} - U + U - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\ &= r_{2k+1} - r_{2k} \\ &= \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k+2}}. \end{aligned}$$

Or $\left|\frac{p_n}{q_n} - U\right| = r_{2k+1} - U \leq \frac{1}{q_{2k+2}q_{2k+3}}$ d'après 2 - 3 - a) donc

$$\begin{aligned} \frac{\left|\frac{p_n}{q_n} - U\right|}{\left|\frac{p_n}{q_n} - U\right| + \left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - U\right|} &= \frac{\left|\frac{p_n}{q_n} - U\right|}{\frac{1}{q_{2k+1}q_{2k+2}}} \\ &\leq \frac{\frac{1}{q_{2k+2}q_{2k+3}}}{\frac{1}{q_{2k+1}q_{2k+2}}} \\ &= \frac{q_{2k+1}}{q_{2k+3}} \\ &= \frac{q_{2k+1}}{a_{2k+2}q_{2k+2} + q_{2k+1}} \\ &= \frac{1}{\underbrace{a_{2k+2}}_{\geq 1} \underbrace{\frac{q_{2k+2}}{q_{2k+1}}}_{>1} + 1} < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en tire $2\left(\frac{p_n}{q_n} - U\right) < \left(\frac{p_n}{q_n} - U\right) + \left(U - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$

et $\frac{p_n}{q_n} - U < U - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. □

donc $U - \frac{p}{q} \leq \left|U - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|U - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = U - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ donc $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q}$ d'où

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q} \leq \frac{p_n}{q_n}$$

2. On obtient à partir de la double inégalité et du fait qu'on travaille avec des entiers le système :

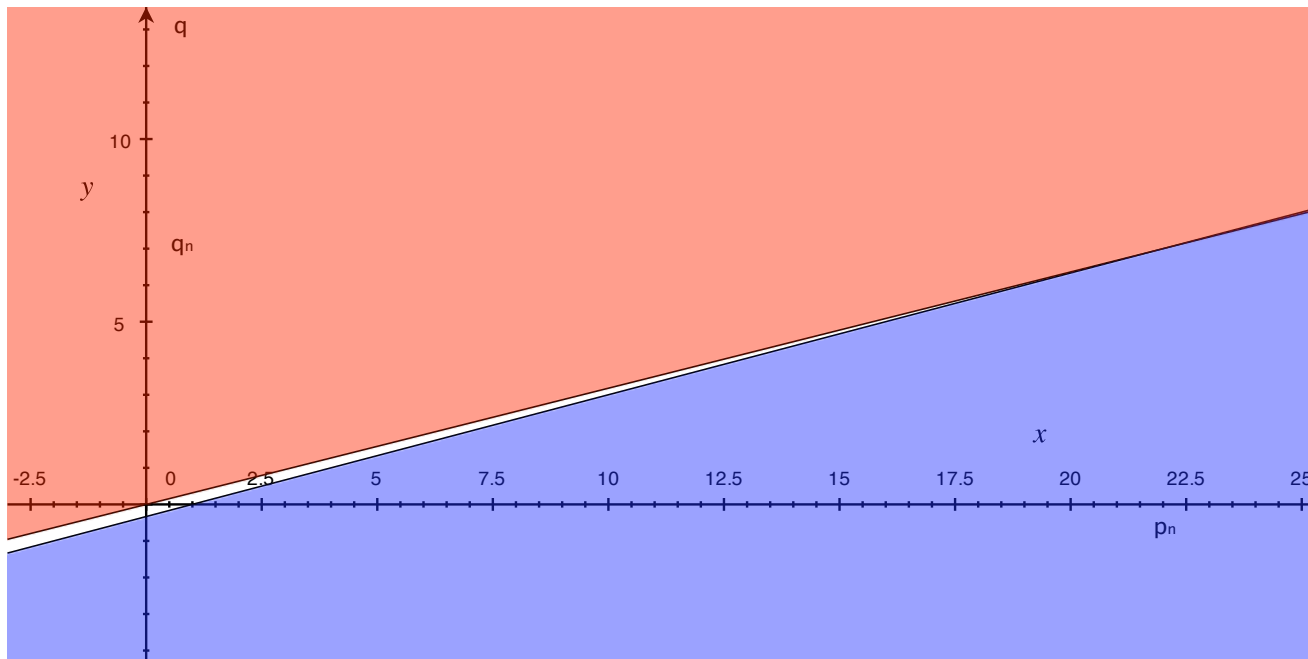
$$I : \begin{cases} pq_n - qp_n \leq 0 \\ -qp_{n-1} + pq_{n-1} \geq 1 \end{cases}$$

On considère le système d'équations associées

$$E : \begin{cases} pq_n - qp_n = 0 \\ -qp_{n-1} + pq_{n-1} = 1 \end{cases}$$

Son déterminant est $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = -(-1)^{n-1} = (-1)^n$.

Le système est donc de Cramer et admet comme solution unique $p = (-1)^n p_n = p_n$; $q = (-1)^n q_n = q_n$.



La partie hachurée en rouge est la solution de la première inéquation et celle en bleue est la solution de la deuxième. Leur intersection est la solution du système I . Mais l'intersection ne comporte que des entiers $p \geq p_n$ et $q \geq q_n$.

Remarque 1. Pour faire la représentation graphique, on a utilisé le développement de $\pi : n = 2, p_1 = 3, p_2 = 22, q_1 = 1, q_2 = 7$.

Il n'y a donc pas de solution vérifiant $1 < q < q_n$. Ce qui est une contradiction.

On soulève de la même manière une contradiction pour n impair.

On en déduit que $\frac{p_n}{q_n}$ est une meilleure approximation rationnelle de U .