

Concours Général Sénégalais 99 : Corrigé de l'épreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée : 6 heures

Partie 1

A

1.

a) Les solutions de (e) sont les $e^{i\frac{2k\pi}{n}}, 0 \leq k \leq n-1$.

b) En posant $w_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, les solutions de (e) sont les $w_n^p, 0 \leq p \leq n-1$.

2. On pose $Z_p = w_n^p, 0 \leq p \leq n-1$.

$$Z_1(Z_0 + Z_1 + \dots + Z_{n-1}) = w_n(1 + w_n + \dots + w_n^{n-1}) = w_n + \dots + w_n^{n-1} + \underbrace{w_n^n}_{=1} = Z_0 + Z_1 + \dots + Z_{n-1}.$$

$$\text{donc } \underbrace{(Z_1 - 1)}_{\neq 0}(Z_0 + Z_1 + \dots + Z_{n-1}) = 0$$

$$\text{D'où } Z_0 + Z_1 + \dots + Z_{n-1} = 0.$$

3.

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = \prod_{p=0}^{n-1} w_n^p = w_n^{\sum_{p=0}^{n-1} p} = w_n^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\prod_{p=0}^{n-1} Z_p\right)^2 = (w_n^n)^{n-1} = 1^{n-1} = 1.$$

donc

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = \pm 1$$

– Si n est impair, $n = 2k + 1$:

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = (w_n^k)^n = 1.$$

– Si n est pair, $n = 2k$

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = (w_n^k)^{n-1} \frac{1}{w_n^k} = \frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{2k}}} = e^{-i\pi} = -1$$

4.

a) On considère le polynôme : $P(Z) = b_n(Z - \alpha_1) \cdots (Z - \alpha_n)$.

En considérant le terme constant de P dans les deux expressions :

$$b_n(-1)^n \prod_{p=1}^n \alpha_p = b_0 \text{ donc}$$

$$\prod_{p=1}^n \alpha_p = (-1)^n \frac{b_0}{b_n}.$$

b) En considérant le terme de degré $n - 1$ de P , on obtient
 $b_{n-1} = -b_n(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$.
 donc

$$\sum_{p=1}^n \alpha_p = -\frac{b_{n-1}}{b_n}.$$

5. On pose $P(Z) = Z^n - 1$ Les racines de P sont les $Z_p, 0 \leq p \leq n - 1$.
 D'après 1 - 4) a) et b)

$$\prod_{p=0}^{n-1} Z_p = (-1)^n \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} Z_p = \frac{-0}{1} = 0$$

6.

$$S_n = \sum_{p=1}^n \cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right) = \sum_{p=1}^n \Re(e^{\frac{i2p\pi}{n}}) = \sum_{p=1}^n \Re(Z_p) = \Re\left(\sum_{p=1}^n Z_p\right) = \Re(0) = 0$$

B

1.

a) Soit β une racine d'ordre n de l'unité i.e. pour $1 \leq k \leq n - 1, \beta^k \neq 1$ et $\beta^n = 1$.

$$Q(X) = 1 + 2X + 3X^2 + \dots + nX^{n-1}$$

$$\text{Posons } P(X) = 1 + X + X^2 + \dots + X^n = \frac{X^{n+1}-1}{X-1}$$

On a : $P'(X) = Q(X)$ et $(X-1)P(X) = X^{n+1} - 1$. En dérivant $P(X) + (X-1)Q(X) = (n+1)X^n$.

En évaluant en β :

$$P(\beta) + (\beta - 1)Q(\beta) = (n + 1)\beta^n = n + 1$$

$$\text{donc } Q(\beta) = \frac{n+1 - \frac{\beta^{n+1}-1}{\beta-1}}{\beta-1} \text{ or}$$

$$\beta^{n+1} = \beta^n \beta = \beta \text{ donc}$$

$$Q(\beta) = \frac{n}{\beta - 1}$$

b) $n=4$: $\{Z_p\}_{0 \leq p \leq 3} = \{\pm 1, \pm i\}$

$$\prod_{p=0}^3 Q(Z_p) = \underbrace{Q(1)}_{=\frac{n(n+1)}{2}} \times \underbrace{Q(-1)}_{=-\frac{n}{2}} \times \underbrace{Q(i)}_{=\frac{n}{i-1}} \times \underbrace{Q(-i)}_{=-\frac{n}{-i-1}}$$

$$\prod_{p=0}^3 Q(Z_p) = \frac{n^4(n+1)}{(-2)^3} = \frac{2^8 \times 5}{-2^3} = -5 \times 2^5.$$

2. Dans le cas général On a pour $1 \leq p \leq n-1$;

$$\begin{aligned}
 |Z_p - 1|^2 &= |Z_p - 1|^2 \\
 &= \left| e^{i\frac{2p\pi}{n}} - 1 \right|^2 \\
 &= \left(\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right) - 1 \right)^2 + \sin^2\left(\frac{2p\pi}{n}\right) \\
 &= \left(2\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) \right)^2 + \left(2\sin\left(\frac{p\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right) \right)^2 \\
 &= 4\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)
 \end{aligned}$$

– Si $n = 2k$

$$\begin{aligned}
 \prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) &= Q(1)Q(-1) \prod_{p=1}^{k-1} Q(Z_p) \prod_{p=1}^{k-1} Q(\overline{Z_p}) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{-n}{2} \times \prod_{p=1}^{k-1} \frac{n^2}{|Z_p - 1|^2} \\
 &= \frac{-n^{2k}(n+1)}{2^2} \prod_{p=1}^{k-1} \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)} \\
 &= -\left(\frac{n}{2}\right)^n \times \frac{n+1}{\prod_{p=1}^{k-1} \sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) = -\left(\frac{n}{2}\right)^n \times \frac{n+1}{\prod_{p=1}^{k-1} \sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)} \quad n = 2k$$

– Si $n = 2k + 1$

$$\prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) = Q(1) \prod_{p=1}^k Q(Z_p) \prod_{p=1}^k Q(\overline{Z_p}) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n^2}{\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)} = \left(\frac{n}{2}\right)^n \times \frac{n+1}{\prod_{p=1}^k \sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)}$$

Dans les deux cas

$$\prod_{p=0}^{n-1} Q(Z_p) = (-1)^{n-1} \left(\frac{n}{2}\right)^n \times (n+1) \left(\prod_{p=1}^{E(n/2)} \sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right) \right)^{-1}$$

C

1.

- Si $n \mid p : p = r \times n, r \in \mathbb{N}^*$.
 $w_n^p = w_n^{r \times n} = (w_n^n)^r = 1^r = 1$
donc

$$S_n(p) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

- Si $n \nmid p : w_n^p \neq 1$

$$S_n(p) = \frac{1 - w_n^{np}}{1 - w_n^p} = 0$$

2. Soient p et q deux entiers relatifs :

$$T_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} w_n^{kq} = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{k(p+q)} = S_n(p+q)$$

$$V_n(p, q) = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{kp} w_n^{-kq} = S_n(p-q)$$

D'après C 1.

On a :

$$T_n(p, q) = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p+q \\ 0 & \text{si } n \nmid p+q \end{cases}$$

et

$$V_n(p, q) = \begin{cases} n & \text{si } n \mid p-q \\ 0 & \text{si } n \nmid p-q \end{cases}$$

D

1. $Z^n - 1 = \prod_{p=0}^{n-1} (Z - Z_p)$

En dérivant :

$$nZ^{n-1} = \sum p = 0^{n-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{n-1} (Z - Z_j)$$

En évaluant en $Z = 1$ et en prenant le module dans les deux membres

$$|n| = \left| \prod_{j=0}^{n-1} (1 - Z_j) \right| = \prod_{j=0}^{n-1} 2 \sin\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

$$n = 2^{n-1} \prod_{p=0}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{n}\right) \text{ donc}$$

$$\prod_{p=0}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{n}\right) = n \times 2^{1-n}$$

2. Si n est pair, $n = 2k$: Pour $0 < p < k$

$$\begin{aligned} \sin \frac{(2k-p)\pi}{2k} &= \sin\left(\pi - \frac{p\pi}{2k}\right) \\ &= \sin\left(\frac{p\pi}{2k}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^{2k-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2k}\right) &= \prod_{p=1}^{k-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2k}\right) \sin \frac{(2k-p)\pi}{2k} \\ &= \left(\prod_{p=1}^{k-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2k}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Si n est impair, $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^{2k} \sin\left(\frac{p\pi}{2k+1}\right) &= \prod_{p=1}^{k-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2k+1}\right) \prod_{p=1}^k \sin \frac{(2k+1-p)\pi}{2k+1} \\ &= \left(\prod_{p=1}^k \sin\left(\frac{p\pi}{2k+1}\right)\right)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$P_1 = \prod_{p=1}^{n-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right) = \sqrt{2n \times 2^{1-2n}} = 2^{1-n} \sqrt{n}$$

$$P_2 = \prod_{p=1}^n \sin\left(\frac{p\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{(2n+1) \times 2^{1-(2n+1)}} = 2^{-n} \sqrt{2n+1}$$

E

On rappelle le lemme de Gauss :

Lemme 1 (Gauss). *Soit a, b, c 3 entiers naturels non nuls. Si a divise le produit bc et si a est premier avec c alors a divise b .*

1. La condition est suffisante :

Supposons que pour tout $m < n$, $Z_p^m = e^{i\frac{2pm\pi}{n}} \neq 1$.

De manière équivalente pour tout $m < n$, $n \nmid pm$.

Si $d \mid n$ avec $1 < d < n$, $n \nmid \frac{n}{d}p$ car $1 < \frac{n}{d} < n$ donc $d \nmid p$.

n et p n'ont pas de diviseur commun autre que ± 1 donc p et n sont premiers entre eux.

Réciproquement, supposons que p et n sont premiers entre eux.

D'après le lemme de Gauss :

Si $n \mid mp$ alors $n \mid m$, donc pour $1 < m < n$, $n \nmid mp$.

Donc $e^{i\frac{2pm\pi}{n}} \neq 1$ et Z_p est une racine d'ordre n de l'unité, donc la condition est nécessaire.

2. Le degré de Φ_n est le nombre d'entiers $1 \leq m < n$ tel que m et n sont premiers entre eux. On le note $\phi(n)$: ϕ est l'indicatrice d'Euler.

3. Si n est premier, alors pour tout $m \in [1, n-1]$, m et n sont premiers entre eux donc

$$\Phi_n(Z) = \frac{Z^n - 1}{Z - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} Z^k$$

4. Si $n = 2$ $\omega_2 = e^{i\frac{2\pi}{2}} = -1$ $\omega_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}} = i$

$$\Phi_4(Z) = (Z - \omega_4)(Z - \omega_4^3) = (Z - i)(Z + i) = Z^2 + 1$$

$$\Phi_2(Z) = Z - 1$$

Montrons que $\Phi_{2n}(Z) = \Phi_n(-Z)$.

Soit n un nombre premier impair : $n = 2p + 1$

Les entiers compris entre 1 et $2n$ et non premiers avec $2n$ sont les $2k$, $1 \leq k \leq n-1$ et n . On en déduit que :

$$\Phi_{2n}(Z) = \prod_{\substack{k=0 \\ 2k+1 \neq n}}^{n-1} (Z - \omega_{2n}^{2k+1}) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n-1} (Z - \omega_{2n}^{2k+1})$$

or pour $0 \leq k \leq n-1$.

On a par ailleurs :

$$\Phi_n(-Z) = \prod_{k=1}^{n-1} (-Z - \omega_n^k) = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} (Z + \omega_n^k) = \prod_{k=1}^{n-1} (Z + \omega_n^k)$$

car $n-1$ est pair

$$\Phi_{2n}(Z) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{n-1} (Z - \omega_{2n}^{2k+1})$$

Il suffit de montrer que

$$\{\omega_{2n}^{2k+1}, 0 \leq k \leq n-1, k \neq p\} = \{-\omega_n^k, 1 \leq k \leq n-1\}$$

Les deux ensembles ont pour cardinal $n-1$ (leurs éléments sont 2 à 2 distincts).

De plus leurs éléments sont des racines énièmes de -1 . En effet :

$$(\omega_{2n}^{2k+1})^n = (\omega_{2n})^{2nk} \omega_{2n}^n = \omega_{2n}^n = -1$$

$$\text{et } (-\omega_n^k)^n = (-1)^n \omega_n^{nk} = (-1)^n = -1.$$

Or, il y a $n-1$ racines énièmes de -1 différentes de -1 .

Donc ces deux ensembles sont tous les deux égaux à l'ensemble des racines énièmes de -1 privé de -1 . D'où le résultat.

$$\Phi_{2n}(Z) = \Phi_n(-Z)$$

F : Applications

1. 5 est premier impair donc

$$\Phi_5(Z) = 1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4$$

$$\text{et } \Phi_{10}(Z) = \Phi_5(-Z) = 1 - Z + Z^2 - Z^3 + Z^4.$$

2. L'ensemble des diviseurs de 12 est $\text{div}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

$$\Phi_1(Z) = Z - 1$$

$$\Phi_2(Z) = Z + 1$$

$$\Phi_3(Z) = Z^2 + Z + 1$$

$$\Phi_4(Z) = (Z - i)(Z - i^2) = Z^2 + 1$$

$$\omega_6 = e^{i2\pi/6} = e^{i\pi/3}$$

$$\Phi_6(Z) = \Phi_3(-Z) = Z^2 - Z + 1$$

$$\omega_{12} = e^{i\pi/6} \text{ et } \Phi_{12}(Z) = (Z - \omega_{12})(Z - \omega_{12}^5)(Z - \omega_{12}^7)(Z - \omega_{12}^{11})$$

$$\text{or } \omega_{12}^6 = -1 \text{ donc}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{12}(Z) &= (Z - \omega_{12})(Z + \omega_{12}^6 \omega_{12}^5)(Z - \omega_{12}^6 \omega_{12})(Z - \omega_{12}^{-1}) \\ &= (Z - \omega_{12})(Z + \omega_{12}^{-1})(Z + \omega_{12})(Z - \omega_{12}^{-1}) \\ &= (Z^2 - \omega_{12}^2)(Z^2 - \omega_{12}^{-2}) \\ &= (Z^2 - \omega_6)(Z^2 - \omega_6^{-1}) \\ &= Z^4 - 2\cos(\pi/3)Z^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Phi_{12}(Z) = Z^4 - Z^2 + 1$$

On a :

$$\Phi_1 \Phi_3 = (Z - 1)(Z^2 + Z + 1) \text{ qui est une identité remarquable : } \Phi_1 \Phi_3 = Z^3 - 1$$

De même, $\Phi_2 \Phi_6 = (Z + 1)(Z^2 - Z + 1) = Z^3 + 1$.

On en déduit $\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_6 = (Z^3 - 1)(Z^3 + 1) = Z^6 - 1$.

$$\Phi_4 \Phi_{12} = (Z^2 + 1)(Z^4 - Z^2 + 1) = Z^6 - 1.$$

On en déduit que

$$\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3 \Phi_4 \Phi_6 \Phi_{12} = (Z^6 - 1)(Z^6 + 1) = Z^{12} - 1$$

Dans le cas général, on peut penser que pour $n \in N^*$:

$$\prod_{d|n} \Phi_d(Z) = Z^n - 1$$

Même si le sujet ne le demande pas, la démonstration de ce théorème est intéressante :

Notons $div(n)$ l'ensemble des diviseurs de n , $div(n) = \{d \in \{1, \dots, n\} / d \mid n\}$

Lemme 2. Soit $n \in N^*$, $p \in \{1, \dots, n\}$ et $Z_p = e^{i2\frac{p\pi}{n}}$

Soit U_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

On appelle ordre de Z_p dans U_n le plus petit entier $k > 0$ tel que $Z_p^k = 1$. L'ordre de Z_p dans U_n divise n .

Démonstration. D'abord k existe et est dans $\{1, \dots, n\}$ car $Z_p^n = 1$

Faisons la division euclidienne de n par k .

$n = qk + r$, q est le quotient et r le reste : $q \in N^*$ et $0 \leq r < k$

On a donc $1 = Z_p^n = Z_p^{qk+r} = (Z_p^k)^q \times Z_p^r = Z_p^r$ car $Z_p^k = 1$.

Donc $Z_p^r = 1$.

Comme k est le plus petit entier strictement positif tel que $Z_p^k = 1$, on a forcément $r = 0$

donc $n = qk$ et $k \mid n$. □

On a donc $\{1, \dots, n\} = \bigcup_{d \in div(n)} \{p \in \{1, \dots, n\} / \text{ordre}(Z_p) = d\}$ donc

$$\begin{aligned} Z^n - 1 &= \prod_{p=1}^n (Z - Z_p) \\ &= \prod_{d \in div(n)} \prod_{p \in \{1, \dots, n\} / \text{ordre}(Z_p) \text{ dans } U_n = d} (Z - Z_p) \\ &= \prod_{d \in div(n)} \prod_{p \in \{1, \dots, n\} / Z_p \text{ racine primitive d'ordre } d \text{ de l'unité}} (Z - Z_p) \end{aligned}$$

Cette dernière égalité vient de la question $E - 1)$ qui dit que

Z_p est racine primitive d'ordre d de l'unité

ssi quelque soit l'entier $m < d$, Z_p n'est pas une racine m -ième de l'unité

ssi quelque soit l'entier $m < d$, $Z_p^m \neq 1$

ssi l'ordre de Z_p dans U_d est exactement d

$$\text{donc } Z^n - 1 = \prod_{d \in div(n)} \Phi_d(Z) \quad (E)$$

On note pour $d \in \mathbb{N}^*$, $\phi(d)$ le degré du polynôme cyclotomique Φ_d . ϕ est la fonction d'Euler. $\phi(d)$ calcule le nombre d'entiers entre 1 et d premiers avec d . En prenant les degrés dans la relation (E), on obtient :

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

Cette relation est très utile en théorie des groupes, mais cette relation sort déjà largement du programme des classes de Terminales.

On peut remarquer que les Φ_n calculés sont tous à coefficients dans ± 1 mais ce n'est vrai que pour $n \leq 105$.

Partie 2

A

1. Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^{2n} - 1$ sont les $e^{\frac{i2k\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq 2n$

$$\{e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq n-1\} = \{\underbrace{e^{\frac{i4n\pi}{2n}}}_{=1} e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq n-1\} = \{e^{\frac{i2(2n-k)\pi}{2n}}, 1 \leq k \leq n-1\}$$

donc

$$\begin{aligned} Z^{2n} - 1 &= (Z - e^{\frac{i4n\pi}{2n}})(Z - e^{\frac{i2n\pi}{2n}}) \prod_{k=1}^{n-1} (Z - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(Z - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) \\ &= (Z^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (Z - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(Z - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) \end{aligned}$$

2.

a) En évaluant le polynôme $Z^{2n} - 1$ en a on obtient :

$$a^{2n} - 1 = (a^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}})$$

donc

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) &= (a+1)^2 \prod_{k=1}^{n-1} (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) \\ &= (a+1)^2 \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} \\ \prod_{k=1}^n (a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) &= \frac{(a+1)(a^{2n} - 1)}{a - 1} \end{aligned}$$

b) On a pour $k \in \mathbb{N}$

$$(a - e^{\frac{i2k\pi}{2n}})(a - e^{-\frac{i2k\pi}{2n}}) = a^2 - (e^{\frac{i2k\pi}{2n}} + e^{-\frac{i2k\pi}{2n}})a + 1 = a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{n} + 1$$

D'où

$$\prod_{k=1}^n (a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{n} + 1) = \frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1}$$

3. D'après les sommes de Riemann

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(x)dx = J(a)$$

B

1.

a) Si $|a| < 1$:

$$\frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1+a}{1-a}$$

b) Si $|a| > 1$,

$$\frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1} = \frac{a^{2n+1}(1-a^{-2n})(1+a^{-1})}{a-1}$$

On pose $h_n = (1-a^{-2n})(1+a^{-1})$.

$h_n > 0$ et $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1+a^{-1}$

On pose

$$b_n = \frac{2\pi}{n} \ln \frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1}$$

Soit $\epsilon = \pm 1$ le signe de a :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2\pi}{n} \ln \left[\frac{(\epsilon |a|)^{2n+1}}{\epsilon |a| - \epsilon^2} h_n \right] \\
&= \frac{2\pi}{n} \ln \left[\frac{\epsilon^{2n+1} |a|^{2n+1}}{\epsilon |a| - \epsilon^2} h_n \right] \\
&= \frac{2\pi}{n} \ln \left[\frac{|a|^{2n+1}}{|a| - \epsilon} h_n \right] \\
&= \frac{2\pi}{n} \left[(2n+1) \ln |a| + \frac{1}{|a| - \epsilon} + \ln h_n \right] \\
&= 4\pi \ln |a| + \underbrace{\frac{2\pi}{n} \ln |a|}_{\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{2\pi}{n} \ln \frac{1}{|a| - \epsilon}}_{\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0} + \overbrace{\frac{2\pi}{n} \ln h_n}^{\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0} \\
&\quad \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} \ln 1 + a^{-1}
\end{aligned}$$

$$b_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 4\pi \ln |a|.$$
$$\begin{aligned} J(a) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \ln(1 + a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \prod_{k=1}^n (1 + a^2 - 2a \cos \frac{k\pi}{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{(a+1)(a^{2n}-1)}{a-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{2} \end{aligned}$$
$$I(a) = 2J(a) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 4\pi \ln |a|$$