UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

10 G 18bis A 01
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 points).

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. Sur la figure, on prendra 8 cm comme longueur du segment $[AB]$.

1. Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $\dfrac{MA}{MB} = 4$.
0,5 pt +0,25 pt

2. Etudier et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.
0,5 pt +0,25 pt

3. Soit C l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{3}{4}\pi$ et D l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{4}$. On désigne par s la similitude directe transformant A en B et C en D.
a) Déterminer le rapport et l'angle de s. **0,5 pt +0,5 pt**
b) On note I le centre de la similitude s. Exprimer IB en fonction de IA et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$. En déduire la position du point I et le placer sur la figure.
0,25 pt x 4
c) Démontrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ACD. **0,5 pt**

EXERCICE 2 (4 points).

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} \equiv 1[p]$."

1. a) Démontrer que 193 est un nombre premier. **0,75 pt**
b) Soit a un entier naturel inférieur à 192. Montrer que $a^{192} \equiv 1[193]$. **0,5 pt**

2. On considère l'équation

$$(E): \quad 83x - 192y = 1 \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers relatifs.}$$

a) Vérifier que le couple (155, 67) est solution de (E). **0,5 pt**
b) Résoudre l'équation (E). **0,75 pt**

3. On note A l'ensemble des 193 entiers naturels inférieurs ou égaux à 192 et on considère les deux fonctions f et g définies de la manière suivante :
à tout entier a de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{83} par 193;
à tout entier a de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{155} par 193.

a) Démontrer $g(f(a)) \equiv a^{83\times 155}[193]$. En déduire que pour tout $a \in A$ on a : $g\big(f(a)\big) = a$.
0,5 pt +0,5 pt

b) Déterminer $f \circ g$. **0,5 pt**

PROBLEME (12 points).

Partie A

Soit a un réel non nul, u et v deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\begin{cases} u' &= v \\ v' &= au \end{cases} \tag{0.1}$$

1. a) Montrer que u et v vérifient l'équation différentielle

$$y'' - ay = 0 \tag{0.2}$$

0,25 pt + 0,25 pt

b) résoudre l'équation (0.2) selon les valeurs de a. **0,75 pt**

2. On suppose que $a = 1$. Déterminer u et v sachant que $u(0) = 3$ et $v(0) = 0$. **0,75 pt**

Partie B

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique 2 cm).

Soit (Γ) l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3}{2}\big(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\big) \\ & \qquad\qquad t \geq 0 \\ y(t) &= \dfrac{3}{2}\big(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\big) \end{cases} \tag{0.3}$$

L'objet de cette partie est de calculer l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0$, $x = 3$ et $x = 5$.

1. a) Démontrer que (Γ) est une partie de la conique dont une équation est :

$$x^2 - y^2 - 9 = 0 \tag{0.4}$$

0,5 pt

b) Préciser la nature de cette conique ainsi que ses éléments géométriques caractéristiques. Construire (Γ). **0,5 pt + 0,5 pt**

2. Soit $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x - \sqrt{x^2 - 9} \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x}{2} + \dfrac{9}{2x} \end{array}$.

a) Etudier les variations de f. **0,75 pt**

b) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $I = \big[3,\ +\infty\big[$ est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. On note φ cette restriction. **0,25 pt**

c) Démontrer que pour tout x élément de J, on a : $\varphi^{-1}(x) = g(x)$. **0,5 pt**

d) Tracer C_φ, courbe représentative de φ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Expliquer comment obtenir $C_{\varphi^{-1}}$, courbe représentative de φ^{-1} dans ce repère, à partir de C_φ. Tracer $C_{\varphi^{-1}}$.
0,25 pt x 3

3. Soit β un élément de $\big]0,\ 3\big[$ et $\alpha = g(\beta)$.

a) Calculer $\displaystyle\int_\beta^3 g(x)\,dx$ et en déduire que $\displaystyle\int_3^\alpha f(x)\,dx = \frac{\beta^2}{4} - \frac{9}{4} - \frac{9}{2}\ln\frac{\beta}{3}$.

[Indication : On pourra interpréter ces deux intégrales comme des aires.]

0,25 pt+0,75 pt

b) En déduire l'aire du domaine plan délimité par (Γ) et les droites d'équation $y = 0,\ x = 3$ et $x = 5$. **0,75 pt**

Partie C

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 5 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \quad \text{si } n \in \mathbb{N} \end{array}\right. \qquad (0.5)$$

On se propose de calculer de trois façons différentes la limite de la suite (u_n).

1. a) Etudier les variations de g puis montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{g(u_n) - g(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}} > 0.$$

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

b) Déterminer le signe de $u_1 - u_0$ puis montrer que la suite (u_n) est monotone.

0,25 pt + 0,25 pt

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,25 pt + 0,25 pt

2. a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g dans un intervalle approprié, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{g(u_n) - 3}{u_n - 3} < \frac{1}{2}$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

0,5 pt + 0,25 pt + 0,25 pt

b) Déterminer une valeur possible de n pour que $u_n - 3 \leq 10^{-3}$. **0,25 pt**

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 3}$.

a) Montrer que $(\ln v_n)$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison. **0,5 pt**

b) Exprimer alors u_n en fonction de n et calculer la limite de (u_n). **0,5 pt + 0,25 pt**