

Concours Général 2000: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Le sujet comporte deux problèmes obligatoires. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies, de la présentation, de la clarté, de la rigueur et de la concision des démonstrations.

Problème 1

A)

Dans cette partie, α est un réel strictement positif. On considère la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ de terme général : $w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ et l'application g_α de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$.

1) Etudier la fonction g_α et dresser son tableau de variations.

2) Pour $n \geq 1$, vérifier que $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. En déduire que si $n \geq 2$, $\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq w_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$.

3)

a) Montrer que la suite (w_n) est monotone.

b) Calculer, suivant les valeurs de α , l'intégrale : $I_n = \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

c) Montrer que :

– Si $0 < \alpha \leq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$.

– Si $\alpha > 1$, alors la suite (w_n) converge vers une limite ℓ telle que $\frac{1}{\alpha-1} \leq \ell \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$.

B)

Dans cette partie et la suivante, on considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ de terme général $S_n = \frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$. On pose $t_n = \ln(S_n)$ pour tout $n \geq 1$ ($\ln$ designant la fonction logarithme neperien).

1) Pour $n \geq 2$, montrer que $t_n - t_{n-1} = 1 + (n - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{n})$

2) Soit h l'application de $[2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = 1 + (x - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{x})$. On note h' la dérivée première de h .

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x)$. Etudier les variations de h' . En déduire le signe de $h'(x)$ pour $x \in [2, +\infty[$.

b) A l'aide de ce qui précède, montrer que chacune des suites (t_n) et (S_n) est monotone.

c) Montrer que la suite (S_n) converge vers une limite positive ou nulle L .

C)

On cherche à calculer la limite L de la suite (S_n) . Soit g l'application de $[2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = h(x) + \frac{1}{x^2}$.

1)

a) Par une méthode analogue à celle utilisée au B.2, déterminer le signe de $g(x)$, pour $x \in [2, +\infty[$.

b) En déduire que, si $n \geq 2$, $t_n - t_{n-1} \geq -\frac{1}{n^2}$.

2)

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $t_n \geq -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

b) A l'aide des résultats de la partie A), trouver un minorant de la suite (t_n) . En déduire que $L > 0$.

3) On considère la suite $(r_n)_{n \geq 1}$ de terme général : $r_n = \frac{S_{2n}}{S_n^2}$.

a) Montrer que la suite (r_n) converge et exprimer sa limite en fonction de L .

b) Calculer r_n en fonction de n , pour tout $n \geq 1$.

c) On admet le résultat suivant : $\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[(2n)!]^2 (2n+1)}{(n!)^4 2^{4n}}$. Calculer L .

Remarque : Ainsi $\sqrt{2\pi}e^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}$ est une valeur approchée de $n!$ pour les très grandes valeurs de n (on dit aussi que c'est un équivalent de $n!$).

Problème 2

1) Nous admettons que toute partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée, admet un plus grand élément, c'est-à-dire : si $E \subset \mathbb{Z}$, $E \neq \emptyset$ et il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $p \leq M$, quel que soit $p \in E$, alors il existe $p_0 \in E$ tel que $p \leq p_0$, quel que soit $p \in E$.

2) Soient G_1 et G_2 deux ensembles non vides. On suppose que dans chacun d'eux est définie une application $(+)$ ayant les mêmes propriétés que celle définie dans $\mathbb{Z}$. On dit qu'une application f définie de G_1 dans G_2 possède la propriété (H) lorsque : pour tous x, y éléments de G_1 , $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

3) Soit G un ensemble non vide dans lequel est définie une addition notée $+$ ayant les mêmes propriétés que celle définie dans $\mathbb{Z}$ (en particulier, l'unique élément e de G vérifiant $x + e = e + x = x$ quel que soit $x \in G$, est noté 0).

Nous supposons qu'est définie dans G une relation notée $\leq$ possédant les mêmes propriétés que $\leq$ dans $\mathbb{Z}$ (en particulier, $[x < y]$ signifie $[x \leq y \text{ et } x \neq y]$).

Enfin, nous supposons que G possède la propriété (A) suivante : pour tous $a \in G, b \in G$ et $a > 0$, il existe un entier n tel que $n.a > b$. (avec $\underbrace{na = a + a + \cdots + a}_{n \text{ fois}}$).

L'objectif du problème est de montrer que : Quel que soit l'élément $u > 0$ de G , il existe une unique application strictement croissante h définie de G dans $\mathbb{R}$, possédant la propriété (H) et vérifiant $h(u) = 1$.

Partie A

Soit $u > 0$ un élément de G . Soit x appartenant à G . Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n = \{p; p \in \mathbb{Z} \text{ et } pu \leq 2^n x\}$, où si $p \in \mathbb{Z}$, $pu = -[(-p)u]$.

1) Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ n'est pas vide. En déduire qu'il existe $p_n \in \mathcal{P}_n$ tel que quel que soit $p \in \mathcal{P}_n$, $p \leq p_n$.

2) Montrer que $p_n u \leq 2^n x < (1 + p_n)u$. En déduire que $2p_n \leq p_{n+1} < 1 + 2p_n$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = 2^{-n} p_n$; y_n est ainsi un rationnel.

a) Etudier la monotonie de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq y_{n+1} - y_n \leq 2^{-n-1}$. En déduire que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $r(x)$.

4) Montrer que s'il existe une application croissante h de G dans $\mathbb{R}$ possédant la propriété (H) et vérifiant $h(u) = 1$ alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $p_n \leq 2^n h(x) < 1 + p_n$.

En déduire que, dans ce cas, $y_n \leq h(x) \leq 2^{-n} + y_n$.

5) Montrer que si h existe alors h est unique.

Partie B

On s'intéresse maintenant à l'application r définie de G dans $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto r(x)$ où $r(x)$ est le réel défini antérieurement.

1) Soient x et x' deux éléments de G tels que $x < x'$ et soient $(p_n)_n$ et $(p'_n)_n$ les suites d'entiers associées respectivement à x et x' (voir A.1)

a) Montrer que $0 < 2^n(x' - x) < (1 + p'_n - p_n)u$.

b) Montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $n_0(x' - x) > u$ et $2^{n_0}(x' - x) > u$.

c) Montrer que si $n > n_0$ alors $2^{n-n_0} < 1 + p'_n - p_n$. En déduire que y_n et y'_n définis par : $y_n = 2^{-n}p_n$ et $y'_n = 2^{-n}p'_n$ vérifient $y_n - y'_n > 2^{-n_0} - 2^{-n}$, pour tout $n > n_0$.

d) Montrer que l'application : $x \mapsto r(x)$ est strictement croissante sur G .

2) Avec les mêmes notations, on pose $y''_n = 2^{-n}p''_n$; $(y''_n)_n$ est la suite associée à $x'' = x + x'$, x et x' étant deux éléments de G .

a) Montrer que $(p_n + p'_n)u \leq 2^n(x + x') < (2 + p_n + p'_n)u$.

b) Montrer que $p_n + p'_n \leq p''_n \leq 1 + p_n + p'_n$ et $y_n + y'_n \leq y''_n \leq 2^{-n} + y_n + y'_n$. En déduire que $r(x'') = r(x) + r(x')$.

3) Montrer que $r(u) = 1$.

4) Conclure.

Partie C (Etude d'un cas particulier)

On prend $G = \mathbb{R}$. Soit f une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ possédant la propriété (H). L'objectif est de montrer que $f(x) = xf(1)$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

1) On suppose que $f(1) = 0$.

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$.

c) Montrer que $f(n) = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

d) On admet que tout nombre réel y positif peut s'écrire sous la forme $y = n + x$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, 1]$. Montrer que $f(y) = 0$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$.

2) On suppose que $f(1) \neq 0$.

a) Montrer que $f(1) > 0$. En déduire que l'application h définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$ possède la propriété (H), est croissante et vérifie $h(1) = 1$.

b) Montrer que $h(x) = x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

3) Conclure.

BAREME

Probleme 1

A)=3 points	B)=2,5 points	C)=3,5 points
1)= 0,5 point	1)=0,25 point	1-a)=0,5 point
2)= 0,5 +0,5 point	2-a)= 0,25 +0,25 +0,5+0,5 point	-b)=0,5 point
3-a) =0,5 point		3-a) = 0,5 point
-b)= 0,5 point	2-b)= 0,25 +0,25 point	-b) = 0,5 point
-c) = 0,5 point	2-c) = 0,25 point	-c)=0,5 point

Probleme 2

A)=4 points	B)=4 points	C)=3 points
1)= 0,5 point	1-a)= 0,5 point	1-a)=0,25 point
2)= 1 point	b)= 0,5 point	-b)= 0,25 point
3-a) = 0,5 point	c)= 0,5 point	c)= 0,5 point
-b) 0,5 point	d)= 0,5 point	d) = 0,5 point
4)= 1 point	2-a) = 0,5 point	2-a)= 0,5 point
5)= 0,5 point	-b)=0,5 point	-b)=0,5 point
	3) = 0,5 point	3)= 0,5 point
	4)=0,5 point	