

Concours Général 01: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Introduction

Le sujet comporte deux problèmes obligatoires. Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté, de la rigueur et de la concision des démonstrations.

Probleme 1

Soit $U = \{(U_n)_{n \in \mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = (4n+2)U_n + U_{n-1}\}$

1. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de U vérifiant respectivement

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_1 = -0,1639 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_1 = -0,1640 \end{cases}$$

Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gardent un signe constant à partir d'un certain rang que l'on déterminera pour chacune des suites (U_n) et (V_n) . Préciser le comportement de (U_n) et (V_n) à l'infini.

2. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de U tels que $a_0 = b_1$ et $a_1 = b_0 = 0$.

a) Calculer $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n$ en fonction de $n (n \in \mathbb{N})$.

b) Etudier la limite de $(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}), n \geq 1$ et $(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}), n \geq 0$. Que peut-on dire de la convergence de $(\frac{a_n}{b_n}), n \geq 1$. (La limite sera déterminée dans la question 3).

c) En étudiant selon le réel μ le comportement de $(a_n - b_n \mu)_{n \geq 0}$, déterminer les éléments de U qui tendent vers 0.

3. A chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction polynômiale ϕ ainsi définie : ϕ_0 est la fonction égale à 1 et $\forall n \geq 1, \phi_n(t) = \frac{t^n (t-1)^n}{n!}$.

a) Etablir que $\forall n \geq 1, \phi''_{n+1} = (4n+2)\phi_n + \phi_{n-1}$.

b) Soit $I_n = \int_0^1 \phi_n(t) e^{-t} dt$. Calculer I_0 et I_1 . Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de U .

c) Déterminer la limite de la suite $(\frac{a_n}{b_n}), n \geq 1$.

d) Justifier l'écriture $\frac{3-e}{e-1} = \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \frac{1}{\ddots}}}}}$.

4. Soit P_n l'unique polynôme tel que $P_n - P'_n = \phi_n$. La vérification de l'existence et de l'unicité de P_n n'est pas demandée : on admettra également que les coefficients de P_n sont des nombres rationnels.

a) Calculer I_n en fonction de $P_n(0)$ et de $P_n(1)$.

b) Montrer que les suites $(P_n(0))_{n \geq 0}$ et $(P_n(1))_{n \geq 0}$ appartiennent à U . (On rappelle que e est irrationnel).

5.

a) En désignant le polynôme défini par $Q_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$. Calculer $Q_n(t) - Q'_n(t)$ (on conviendra que $Q_0(t) = 1$).

b) Etablir l'égalité(*) suivante où $n \in \mathbb{N}$ et $W_k = \frac{(2k)!}{k!}$.
 (*) $P_n(\frac{1}{2} + u) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} W_k}{2^{2(n-k)} (n-k)!} - Q_{2k}(u)$.

c) En admettant que, pour t fixé, la suite $n \mapsto Q_n(t)$ converge vers e^t ; déterminer la limite de la suite : $n \mapsto \frac{P_n(\frac{1}{2}+u)}{W_n}$ (u fixé). On pourra montrer que pour tout réel u , il existe une constante $k > 0$ telle que l'on ait $|\frac{P_n(\frac{1}{2}+u)}{W_n} - Q_{2n}(u)| < \frac{k}{2^{n-1}}$. En déduire que pour toute suite $(U_n)_{n \geq 0}$ de U , $(\frac{U_n}{W_n})_{n \geq 0}$ est convergente. Déterminer sa limite en fonction de U_0 et U_1 .

Problème 2

1. Calculer $\tan 3\phi$ en fonction de $t = \tan \phi$.

2. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la famille de droites Δ_t d'équations $t^2x - ty + \frac{p}{2} = 0$, t étant un paramètre réel non nul et p un réel strictement positif donné.

a) Discuter suivant la position du point $M_0(x_0, y_0)$, le nombre de droites (Δ_t) qui passent par M_0 .

b) On notera (P) l'ensemble des points M_0 où passe une droite unique (Δ_t) . Montrer que (P) est une parabole dont on donnera l'équation réduite. Donner une équation de la droite (Δ_t) correspondante.

3.

a) Déterminer l'ensemble (D) des points M_0 tels que l'angle géométrique des droites (Δ_t) passant par M_0 , soient perpendiculaires.

b) Déterminer l'ensemble (H) des points M_0 tels que l'angle géométrique des droites (Δ_t) passant par M_0 , ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

4. Soit F le point d'abscisse $\frac{p}{2}$ de l'axe $(Ox) : F = (\frac{p}{2}, 0)$. Montrer que pour tout point M de (H) , $\frac{MF}{MK}$ est une constante, K étant le projeté orthogonal de M sur (D) .

5.

a) Montrer que la perpendiculaire (Δ') à (Δ_t) au point où (Δ_t) coupe $y'Oy$, passe par un point fixe. Cette perpendiculaire (Δ') coupe (D) au point I d'ordonnée h .

b) Déterminer l'ensemble décrit par le point d'intersection de (Δ_t) avec la droite d'équation $y = h$, quand t varie et préciser ce que sont les droites (Δ_t) pour cet ensemble.

6. On considère les droites (Δ_t) correspondant aux valeurs t_1, t_2 et t_3 solutions de l'équation $t^3 - 3t + k(1 - 3t^2) = 0$ (1) (k étant un réel).

a) Montrer que M_1, M_2 et M_3 , points d'intersection respectifs de Δ_{t_2} et Δ_{t_3} , Δ_{t_1} et Δ_{t_3} , Δ_{t_1} et Δ_{t_2} sont les sommets d'un triangle équilatéral.

b) Calculer les coordonnées de M_1, M_2 et M_3 en fonction de t_1, t_2 et t_3 .

7. Calculer $t_1 + t_2 + t_3, t_1t_2 + t_3t_1 + t_2t_3$ en fonction des coefficients de l'équation (1).

8.

a) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle $M_1M_2M_3$ en fonction de k et p .

b) Quel est l'ensemble décrit par G , lorsque k varie dans $\mathbb{R}$?

FIN DU SUJET