

Concours Général 2003: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Partie 1

Dans cette partie on généralise le théorème des accroissements finis.

1) Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, admettant une dérivée d'ordre $n + 1$ sur $]a, b[$. Soit ϵ_n le nombre défini par : $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \epsilon_n = 0$ et ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \epsilon_n$.

a) Montrer que $\phi^{(m)}(a) = 0$ pour tout entier m tel que $0 \leq m \leq n$.

b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer, en partant de $C_0 = b$, que pour tout entier m vérifiant $0 < m \leq n + 1$, il existe $C_m \in]a, C_{m-1}[$ tel que $\phi^{(m)}(C_m) = 0$. En déduire qu'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = \epsilon_n$.

Remarque 1. En remplaçant ϵ_n par $f^{(n+1)}(c)$, on a $(F1) : f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ cette formule est appelée formule de Taylor à l'ordre n , $n \in \mathbb{N}$, avec reste de Lagrange. Le reste de Lagrange est $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. Le réel c dépend de f, a, b et n . Le théorème des accroissements finis correspond ici à l'ordre $n = 0$.

2) Soient a, b et c trois réels avec $a < b$. Montrer que $c \in]a, b[$ si et seulement s'il existe un unique réel $\theta \in]0, 1[$ tel que $c = a + \theta(b - a)$.

Remarque 2. En utilisant ce résultat, la formule $(F1)$ devient (en posant par exemple $a = 0$ et $b = x$) la formule suivante, dite formule de Mac-Laurin à l'ordre n d'une fonction dérivable sur un intervalle I contenant 0.

$(F2) : f(x) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \theta \in]0, 1[; \forall x \in I, \theta$ dépend de f, x et n .

3) Applications On pose $\alpha_r(x) = (1+x)^r, x \in]-1, +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$. Donner la formule de Mac-Laurin à l'ordre n , de α_r pour $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$ pour tous a et b réels. Les notations qu'on donne ici sont valables pour les parties 2, 3 et 4. On note F l'ensemble des fonctions numériques f d'une variable réelle continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $(P_0) : f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. On note F^* les fonctions non nulles de F et D l'ensemble des fonctions de F^* qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Partie 2

1)

- a) Que devient la relation (P_0)
 1^{er} cas : $y = 0$ 2^{eme} cas : $x = y = 0$
- b) Déterminer les fonctions constantes sur $\mathbb{R}$ vérifiant (P_0) . En déduire que F, F^* et D sont non vides.
- c) Soit $f \in F$, quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$.
- 2)
- a) Soit $f \in F$. Montrer que $f(0) = 0$ si et seulement si f est la fonction nulle.
- b) Soient $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $f \in F$ tel que $f(x_0) = 0$. Montrer que $f(\frac{x_0}{2^n}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $f(0) = 0$.
- 3) Soit $f \in F^*$. Montrer que $f(0) = 1$ et $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 4)
- a) Soient $k \in \mathbb{R}, f$ et $g \in F$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k, f et g pour que $kf \in F, f + g \in F$. En déduire que si $f, g \in F^*$ alors $f + g \notin F^*$.
- b) Soient f et $g \in F^*$. Montrer que fg et $\frac{f}{g} \in F^*$.
- c) Soient $f \in D$ et $g \in D$. Montrer que fg et $\frac{f}{g} \in D$.
- 5) Soient $f \in F^*$ et $r \in \mathbb{Q}$.
- a) Montrer que $f(rx) = [f(x)]^r$ (on pourra successivement prendre $r = 0, r = -1, r = n \in \mathbb{N}, r = m \in \mathbb{Z}$ puis $r = \frac{p}{q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$).
- b) Montrer que $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
- 6) Soient f et $g \in F^*$. Montrer que $f(1) = g(1)$ si et seulement si $f = g$.

7) D'après 2 – 6) et 2 – 5a) si $f(1) = a$ alors $f(r) = a^r, \forall r \in \mathbb{Q}$ et $a > 0$ d'après 2 – 3). Soit a un réel strictement positif et $\bar{f}_a$ la fonction définie par

$$\begin{aligned} \bar{f}_a : \mathbb{Q} &\rightarrow]0, +\infty[\\ r &\mapsto \bar{f}_a(r) = a^r \end{aligned}$$

On admet que $\bar{f}_a$ possède un prolongement sur $\mathbb{R}$ qui est unique et dérivable. On note le prolongement $f_a : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ tel que $f_a(r) = a^r \forall r \in \mathbb{Q}$.

a) Montrer que $f_a \in D$ (on pourra utiliser la propriété (P_1) du préambule).

b) Soit l'application

$$\begin{aligned} \alpha :]0, +\infty[&\rightarrow D \\ a &\mapsto \alpha(a) = f_a \quad \text{où } f_a \text{ est définie comme ci-dessus.} \end{aligned}$$

Montrer que α est une application bijective.

c) propriétés algébriques de α : Pour tous réels a et b de $]0, +\infty[$ et tout rationnel r , montrer que

$$\begin{aligned} c_1) \quad \alpha(ab) &= \alpha(a)\alpha(b) & c_2) \quad \alpha\left(\frac{1}{a}\right) &= \frac{1}{\alpha(a)} \\ c_3) \quad \alpha\left(\frac{a}{b}\right) &= \frac{\alpha(a)}{\alpha(b)} & c_4) \quad \alpha(a^r) &= [\alpha(a)]^r \end{aligned}$$

Partie 3

1) Soit $f_a \in F^*$ dérivable en 0. Montrer que si $x_0 \in \mathbb{R}$ alors f_a est dérivable en x_0 et que $f'_a(x_0) = f'_a(0)f_a(x_0)$ (on pourra utiliser 2 – 5b))

2) Soit $f_a \in D$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_a est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et que : $f_a^{(n+1)}(x) = f'_a(0)f_a^{(n)}(x)$ et $f_a^{(n)}(x) = [f'_a(0)]^n f_a(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Pour tout $a \in]0, +\infty[$, on pose $\mu(f_a) = f'_a(0)$. On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} \mu : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ f_a &\mapsto \mu(f_a) = f'_a(0) \end{aligned}$$

propriétés algébriques de μ :

a) Montrer que :

$$a_1) \quad \mu(f_a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \qquad a_2) \quad \mu(f_a) > 0 \Leftrightarrow a > 1.$$

b) Pour tous a et b de $]0, +\infty[$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, montrer que

$$\begin{array}{ll} b_1) & \mu(f_a f_b) = \mu(f_a) + \mu(f_b) \quad b_2) \quad \mu\left(\frac{1}{f_a}\right) = -\mu(f_a) \\ b_3) & \mu\left(\frac{f_a}{f_b}\right) = \mu(f_a) - \mu(f_b) \quad b_4) \quad \mu(f_{a^r}) = -\mu[(f_a)^r] = r\mu(f_a) \end{array}$$

c) Montrer que $c_1) \quad \mu(f_a) = \mu(f_b) \Leftrightarrow a = b \quad \mu(f_a) > \mu(f_b) \Leftrightarrow a > b.$

4) Tableau de variations pour $f_a \in D$

a) En utilisant 3.2) et 3.3a) donner les sens de variations de f'_a et f_a en fonction de $a, a \in]0, +\infty[$.

b) On suppose que $a > 1$. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que : $(*) f_a(x) \geq 1 + x(\mu(f_a)), \forall x > 0$.

c) En déduire que $(*)$ reste vrai
 $c_1)$ pour $0 < a < 1$ et $x < 0$ $c_2)$ pour $x = 0, a \in]0, +\infty[$.

d) Si $a > 1$ (respectivement $a < 1$) calculer les limites de f_a en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) puis en $-\infty$ (respectivement en $+\infty$). Compléter les tableaux de variations du 3.4a).

e) On suppose que $a > 1$.

1. $e_1)$ En utilisant la formule de Mac-Laurin, montrer que $f_a(x) \geq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} [\mu(f_a)]^k, \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$.
2. $e_2)$ En déduire les limites de $\frac{f_a(x)}{x^n}$ et $x^n f_a(-x)$ en $+\infty$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Puis les limites de $\frac{f_a(x)}{x^r}$ et $x^r f_a(-x)$ en $+\infty$ avec $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

5) Soit x un réel positif, on pose $s_k(x) = \frac{x^k}{k!}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On donne $S_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n s_k(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} (n \in \mathbb{N}^*)$. On définit ainsi une suite $(S_n(x))_n$ dépendant du paramètre $x \in]0, +\infty[$. On veut montrer qu'elle est convergente et on suit la démarche suivante.

a) Etudier la convergence de $(S_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$.

b) On suppose que $x > 0$, on pose $p = 2(E(x) + 1)$. Montrer que, pour $k \geq p, s_k(x) \leq s_{p-1}(x) \frac{1}{2^{k-p+1}}$.

c) Etudier la convergence de $(S_n(x))_n, x \in]0, +\infty[$ puis en utilisant (a) et (b) ci-dessus, montrer que $(S_n(x))_n$ converge pour tout $x \in]0, +\infty[$.

Remarque 3. On note $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})$. Cette notation reste valable pour la suite. Calculer $S_5(1)$ à 10^{-3} près.

6) Soit $f_a \in D$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mu(f_a)$ pour que $f'_a \in D$.

7)

a) En utilisant la formule de Mac-Laurin à l'ordre n de $f_a, n \in \mathbb{N}^*$, montrer que si $\mu(f_a) = 1$ alors $a = \gamma$ où γ est défini en 3.5.c, en déduire que $\mu[f_\gamma]^r = r, \forall r \in \mathbb{Q}$ en utilisant 3.3.b₄).

b) Donner les formules de Mac-Laurin à l'ordre n de f_γ et f_a pour $a \in]0, +\infty[$.

c) Si $\mu(f_a) = m \in \mathbb{R}$, en utilisant 3.7.b), montrer qu'il existe θ et $\theta' \in]0, 1[$ tel que : $a - f_\gamma(m) = \frac{m^{n+1}}{(n+1)!} [f_a(\theta) - f_\gamma(\theta'm)]$. En déduire que $a = f_\gamma(m)$ c'est-à-dire $a = f_\gamma(\mu(f_a)), \forall a > 0$.

d) En utilisant la formule de Mac-Laurin à l'ordre $n, n \in \mathbb{N}^*$ de $\alpha_r(x) = (1+x)^r$ où $r \in \mathbb{Q}, |r| < 1, x > -1$ (voir 1.3) avec $x = a-1$, puis en faisant tendre r vers 0, montrer qu'il existe $\theta''_0 \in]0, 1[$ dépendant de n et a tel que

$$\mu(f_a) = f'_a(0) = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(a-1)^n}{n} + (-1)^n \frac{(a-1)^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{[1 + \theta''_0(a-1)]^{n+1}}$$

Vérifier $\forall a > 0, 1 + \theta''_0(a-1)$ est compris entre 1 et a (regarder les cas $a = 1, a < 1$ et $a > 1$).

8) On définit une nouvelle application λ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $\lambda = \mu \circ \alpha$.

a) **propriétés algébriques de λ** Si $a, b \in]0, +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$, en utilisant 27), 33) et 3.7) montrer que

$a_1)$	$\lambda(1) = 0$	$a_2)$	$\lambda(\gamma) = 1$
$a_3)$	$\lambda \circ f_\gamma(r) = r, \forall r \in \mathbb{Q}$	$a_4)$	$f_\gamma \circ \lambda(a) = a, \forall a > 0$
$a_4)$	$\lambda(ab) = \lambda(a) + \lambda(b)$	$a_6)$	$\lambda(\frac{1}{a}) = -\lambda(a)$
$a_7)$	$\lambda(\frac{a}{b}) = \lambda(a) - \lambda(b)$	$a_8)$	$\lambda(a^r) = r\lambda(a), \forall r \in \mathbb{Q}$

b) propriétés analytiques de λ

1. b_1) En utilisant 3.7.d, montrer que λ est continue et dérivable en 1 et que $\lambda'(1) = 1$.
En déduire que λ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et donner $\lambda'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Préciser les variations de λ . (N.B. : λ' est la dérivée première de λ).
2. b_2) En utilisant 3.8.aa₃) et a_4) et la propriété (P_1) du préambule, montrer que λ est bijective de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et que f_γ est sa bijection réciproque. b_3) Calculer les limites de λ en 0^+ et $+\infty$ puis les limites de $\frac{\lambda(x)}{x^r}$ en $+\infty$ et $x^r \lambda(x)$ en 0^+ , $r \in \mathbb{Q}_+^*$ (on pourra utiliser f_γ).

c) : détermination des fonctions D en fonction de f_γ et λ Montrer que $f_a(r) = f_\gamma(r\lambda(a))$, $\forall r \in \mathbb{Q}$. En déduire que $f_a(x) = f_\gamma(x\lambda(a))$, $\forall x \in \mathbb{R}, a > 0$.

Partie 4

On se propose de montrer ici que les fonctions de D peuvent être regardées comme des limites de suites. Pour cela d'après le 3.8.c) il suffit de le montrer pour f_γ . Si x est un réel, on pose $t_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$w_n(x) = \begin{cases} t_n(x) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{t_n(-x)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On définit ainsi deux suites $(t_n(x))_n$ et $(w_n(x))_n$.

1)

a) Si $x > 0$, en utilisant la formule du binôme de Newton montrer que $t_n(x) > 1$.

b) Si $x > 0$, montrer que $t_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{k-1}{n})$ En déduire que $t_n(x) \leq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ puis que la suite $(t_n(x))_n$ est majorée en utilisant 3.5).

c) Montrer que $(t_n(x))_n$ est croissante puis qu'elle converge.

2) Etudier la convergence de la suite $(t_n(0))_n$.

3)

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|t_n(x)t_n(-x)| \leq \frac{1}{n} [t_n(x^2) - 1]$. En déduire que $(t_n(x))_n$ converge pour $x < 0$.

b) Montrer que $(t_n(x))_n$ converge pour tout réel x . On note $h(x)$ sa limite. Montrer que $(w_n(x))_n$ converge vers $h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4) Montrer que $w_n(-x) = \frac{1}{w_n(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5)

a) Soient x et y deux réels, montrer que $|t_n(x)t_n(y) - t_n(x+y)| \leq \frac{1}{n}t_n(|x+y|)(t_n(xy) - 1)$. En déduire que h vérifie (P_0) c'est-à-dire $h(x+y) = h(x)h(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w'_n(x) = h(x)$ où $w'_n(x)$ est la dérivée première de w_n en tant que fonction de x .

c) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b w'_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} w'_n(x) dx$ ($a, b \in \mathbb{R}$) et que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc $h \in D$). Montrer que $h(x) = h(1) + \int_1^x h(t) dt$; en déduire que $h'(x) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $h = f_\gamma$.

Conclusion

On vient d'étudier les fonctions exponentielles à base a (avec $a > 0$) que vous avez peut-être définies par $f_a(x) = \exp_a x = a^x = e^{x \ln a}$. La fonction f_γ est la fonction exponentielle à base $e = \gamma$ et la fonction λ est la fonction logarithme népérien introduite ici de manière peu usuelle.