Durée : 06 heures
Toutes séries réunies

SESSION 2008

CLASSES DE TERMINALE

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME 1 (08 points)

A. Soit a un nombre réel de l'intervalle $[0, \pi]$. **(02 pts)**
On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = \ln(x^2 - 2x\cos a + 1)$$

Et $\mathcal{C}a$ la représentation graphique de f_a dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Etudier les variations de la fonction f_a. **(01,5 pt)**

2) Tracer la courbe $\mathcal{C}a$ pour $a = \frac{\pi}{3}$. **(0,5 pt)**

B. Soit n un entier naturel non nul **(06 pts)**

1. a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^{2n} - 1 = 0$. $\mathbb{C}$ désignant l'ensemble des nombres complexes. **(0,75 pt)**

b) Soit Z_k le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{k\pi}{n}$, $k \in I = \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$. **(0,5 pt)**

Soit $k \in I - \{0, n\}$ et k' un entier tel que $k + k' = 2n$

Développer l'expression : $(Z - Z_k)(Z - Z_{k'})$

c) On admettra que **(0,5 pt)**

$\forall Z \in \mathbb{C}$; $Z^{2n} - 1 = (Z - Z_0)(Z - Z_1) \ldots\ldots (Z - Z_{2n-1})$

En utilisant b) montrer que :

$$Z^{2n} - 1 = (Z^2 - 1)(Z^2 - 2Z\cos\frac{\pi}{n} + 1)(Z^2 - 2Z\cos\frac{2\pi}{n} + 1) \ldots (Z^2 - 2Z\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1)$$

2) On considère la fonction Sn définie par :

$$Sn(x) = \sum_{k=1}^{n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $f_{\frac{k\pi}{n}}(x) = \ln(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$

a) Montrer que Sn est définie et continue sur $\mathbb{R}$ **(0,75 pt)**

b) Déduire de B. 1) c) que si $x^2 \neq 1$, on a : **(0,5 pt)**

$$Sn(x) = \ln\left(\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}\right)$$

c) En déduire alors Sn (1) et Sn (-1). **(0,5 pt)**

3) x étant un réel fixe, différent de 1 et -1, on considère la fonction g_x telle que :
   $g_x(t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$ pour $t \in [0, \pi]$.
   a) Vérifier que g_x est bien définie sur $[0,\pi]$ et qu'elle admet une primitive définie sur $[0, \pi]$ qui s'annule en 0. **(0,75 pt)**
   b) En appliquant la méthode des rectangles à la fonction g_x, exprimer $\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_x\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ en fonction de Sn (x). **(01 pt)**
   c) En déduire la valeur de l'intégrale $I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right)dt$. **(0,75 pt)**

PROBLEME 2 (12 points)

Préliminaires

Le but du problème est l'étude du point de Torricelli pour un triangle

On considère dans le plan un triangle ABC tel que :

L'angle $\left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}\right)$ admet une mesure α dans l'intervalle $]0 ; \Pi[$.

L'angle $\left(\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{BA}\right)$ admet une mesure β dans l'intervalle $]0 ; \Pi[$.

L'angle $\left(\overrightarrow{CA} ; \overrightarrow{CB}\right)$ admet une mesure γ dans l'intervalle $]0 ; \Pi[$.

On désigne par E_A le demi plan fermé limité par (BC) passant par A.

On désigne par E_B le demi plan fermé limité par (AC) passant par B.

On désigne par E_C le demi plan fermé limité par (AB) passant par C.

PARTIE A PROPRIETES PRELIMINAIRES (02,25 pts)

1) Soit P un point intérieur au sens strict au triangle ABC
   a) Démontrer l'inégalité : PA + PB < CA + CB. (On pourra construire le point P' intersection des droites (AP) et (CB). (0,5 pt)
   b) Soit θ la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{PA} ; \overrightarrow{PB}\right)$ tel que $\theta \in]0 ; \Pi[$ **(0,5 pt)**
   Démontrer l'inégalité $\gamma < \theta$

2) Soit Q un point du demi plan E_A et R son symétrique par rapport à la droite (BC). **(0,25 pt)**
   Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MQ \leq MR$.

3) Les droites (BC) ; (CA) et (AB) partagent le plan en sept régions ; définir ces régions en fonction de E_A, E_B et E_C. **(01 pt)**

PARTIE B CONSTRUCTION DU POINT DE TORRICELLI (02,5 pts)

On construit trois triangles équilatéraux ACB', BAC' et CBA' tels que :
$B' \notin E_B$, $C' \notin E_C$ et $A' \notin E_A$.

1) Démontrer les égalités : AA' = BB' = CC'. (On pourra utiliser des rotations convenablement choisies). **(0,5 pt)**
2) a) Montrer que les droites (AA') et (BB') sont sécantes. Soit T leur point d'intersection. **(0,25 pt)**
   b) Montrer que les points A'BCT sont cocycliques. **(0,5 pt)**
   c) Montrer de même que B'CAT et C'ABT sont cocycliques. **(0,5 pt)**

3) Déterminer l'ensemble des mesures de l'angle $(\overrightarrow{TC}\,;\,\overrightarrow{TC'})$ dans le cas où cet angle est défini. En déduire que les droites (AA') ; (BB') et (CC') sont concourantes en T.
Le point T est appelé point de Torricelli du triangle ABC. **(0,5 + 0,25 pt)**

PARTIE C **POSITION DU POINT DE TORRICELLI** **(04 points)**

1) On suppose que le point T est intérieur, au sens strict ; au triangle ABC.
   a) Donner la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{TA}\,;\,\overrightarrow{TB})$; $(\overrightarrow{TB}\,;\,\overrightarrow{TC})$; $(\overrightarrow{TC}\,;\,\overrightarrow{TA})$ **(0,5 pt)**
   b) Montrer que chacun des réels α, β, γ appartient à l'intervalle $\left]0;\dfrac{2\Pi}{3}\right[$ **(0,5 pt)**

2) On suppose que le point T est extérieur, au sens strict ; au triangle ABC et qu'il appartient au demi plan E_C.
   a) Déterminer la mesure principale de chacun des angles $(\overrightarrow{TA}\,;\,\overrightarrow{TB})$; $(\overrightarrow{TB}\,;\,\overrightarrow{TC})$; $(\overrightarrow{TC}\,;\,\overrightarrow{TA})$. On discutera suivant la position du point C. **(01 pt)**
   b) En déduire que $T \notin E_A$; $T \notin E_B$ et que le réel $\gamma \in \left]\dfrac{2\Pi}{3}\,;\,\Pi\right[$ **(0,5 pt)**

3) On suppose que le point T appartient au triangle ABC ($T \in [AB] \cup [BC] \cup [AC]$). **(0,5 + 0,5 pt)**

   Préciser la position du point T. En déduire α, β, γ.

4) Formuler une condition nécessaire et suffisante portant sur le triangle pour que le point T soit à l'intérieur du triangle au sens strict. **(0,5 pt)**

PARTIE D **MINIMUM DE MA + MB + MC** **(03,25 pts)**

On considère la fonction φ définie du plan dans $\mathbb{R}^+$ par : $\varphi(M) = MA + MB + MC$. On se propose de déterminer s'il existe, le minimum de la fonction φ et l'ensemble des points pour lesquels il est atteint.

On désigne par r_1 ; r_2 et r_3 les rotations d'angle $\dfrac{\Pi}{3}$ et de centres respectifs A, B, C.

On pose $M_1 = r_1(M)$; $M_2 = r_2(M)$ et $M_3 = r_3(M)$.

1) a) Etablir les égalités : **(0,75 pt)**

   $\varphi(M) = AM + MM_3 + M_3A' = BM + MM_1 + M_1B' = CM + MM_2 + M_2C'$.

   b) Montrer que la fonction φ est minorée par le réel CC'. **(0,25 pt)**

   c) Soient M un point du demi plan E_A et N son image par la symétrie orthogonale d'axe (BC).

   Comparer $\varphi(M)$ et $\varphi(N)$. Montrer que si la fonction φ est minimale en un point M, ce point est à l'intérieur au sens large du triangle ABC. **(0,25 + 0,5 pt)**

2) On suppose dans cette question : $0 < \alpha < \dfrac{2\Pi}{3}$; $0 < \beta < \dfrac{2\Pi}{3}$: $0 < \beta < \dfrac{2\Pi}{3}$.
   a) Montrer que le point T appartient au segment [C C'] **(0,25 pt)**
   b) Sachant que $T_2 = r_2(T)$ appartient au segment [T C']. Calculer $\varphi(T)$. **(0,25 + 0,25 pt)**

   Quel est le minimum de la fonction φ ?

c) Soit M un point du plan tel que $\varphi(M) = \varphi(T)$. Montrer que le point M appartient à chacune des droites (AA') ; (BB') et (CC'). Conclure. **(0,5 + 0,25 pt)**