

Concours Général 96: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Préambule

Il s'agit de définir et d'étudier la fonction logarithme népérien ($\ln$) sans recourir à l'intégration. La définition envisagée repose sur la convergence d'une suite et sur l'étude des applications f d'une partie D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de réels x et y appartenant à D , $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Partie A

A1 Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel r supérieur ou égal à -1 on a : $(1 + r)^n \geq 1 + nr$ (1)

A2 Démontrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel s supérieur ou égal à $+1$ on a : $ns^{n+1} + 1 \geq (n + 1)s^n$ (2)

On pourra poser $\frac{1}{s} - 1 = r$ et appliquer (1)

A3 Soit E la fonction partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$.

a) On suppose x supérieur ou égal à 1 , et on pose : $n_0 = E(\frac{1-x}{\epsilon}) + 1$ où ϵ est un réel strictement positif. Démontrer, en utilisant l'inégalité (1), que pour tout réel strictement positif ϵ et pour tout n supérieur ou égal à n_0 on a : $1 \leq \sqrt[n]{x} < 1 + \epsilon$ (On démontrera que si $n \geq n_0$ alors $x \leq 1 + n\epsilon$).

b) On suppose que x est strictement compris entre 0 et 1 , montrer en utilisant le résultat de A3a) que : $\frac{1}{1+\epsilon} \leq \sqrt[n]{x} \leq 1$

On supposera que les résultats de A3 prouvent que pour tout x strictement positif la suite $U_n = \sqrt[n]{x}$ est convergente et que l'on a plus précisément $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$.

A4 Montrer que pour tout x supérieur ou égal à $+1$, la suite $v_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ vérifie pour tout entier n strictement positif : $v_{n+1}(x) \leq v_n(x)$ (3) et $\frac{x-1}{x} \leq v_n(x) \leq x - 1$ (4)
On pourra utiliser (2) en posant $s = \sqrt[n(n+1)]{x}$.

A5

a) Soit $x \geq 1$. Montrer que la suite $v_n(x)$ est convergente en établissant que : $\frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \leq x - 1$. (5)

b) Soit $0 < x \leq 1$, montrer, en posant $y = \frac{1}{x}$ et en utilisant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(\frac{1}{x}) = -\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x)$.

c) Soit $0 < x < 1$, montrer que $\frac{x-1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) \leq x - 1$.

Ces 5 résultats nous ont permis d'établir que pour $x > 0$, la suite $v_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$ est convergente et de donner les précisions (5) et (6) sur sa limite. On remarque en outre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(0) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(1) = 0$.

Partie B

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction vérifiant, pour tout x, y appartenant à D , $f(xy) = f(x) + f(y)$ (7)

B1 Montrer que si $D = \mathbb{R}$ seule la fonction nulle vérifie (7).

B2 Montrer que si $D = \mathbb{R}^*$ (ensemble des réels non nuls) et si f est solution de (7) alors $f(1) = f(-1) = 0$. En déduire sous ces mêmes conditions que f est paire.

B3 Soit $D = \mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Montrer que les fonctions constantes sur D et non nulles ne sont pas solutions de (7).

Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques définies sur D , non nulles, non constantes, dérivables et vérifiant (7).

B4 Montrer que si f appartient à $\mathcal{F}$, on a pour tout entier naturel n , $f(x^n) = nf(x)$ (8)
ou encore $f(x) = nf(\sqrt[n]{x})$ (9)

B5 Montrer que pour tout x strictement positif et pour tout $f \in \mathcal{F}$ on a $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$ (10) (on dérivera (7) par rapport à y)

B6 Montrer que le résultat obtenu en B3 prouve que $f'(1) \neq 0$ et que si f est élément de $\mathcal{F}$ alors $\lambda.f$ l'est aussi. (λ étant un réel non nul.) Il est donc possible de choisir $f'(1) = 1$.

B7 En utilisant B2 et B6 montrer que $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t-1} = 1$.

Conclusion de la Partie B Vous avez démontré à la question B4 que pour tout $x > 0$ et pour tout $n \geq 1$ $f(x) = nf(\sqrt[n]{x})$ et aussi à la question A3 que la suite $U_n(x) = \sqrt[n]{x}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = 1$ pour $x > 0$. En utilisant le résultat B7 vous constatez que l'on est conduit à poser nécessairement pour tout $x > 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n[\sqrt[n]{x} - 1]$. En effet $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)}{t-1} = 1$ et $t = \sqrt[n]{x}$ avec $x > 0$ entraîne que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\sqrt[n]{x})}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{n(\sqrt[n]{x}-1)} = 1$. En outre $\lim_{n \rightarrow +\infty} n[\sqrt[n]{x} - 1]$ a bien un sens comme démontré à la question A5.

Partie C

Les résultats obtenus au cours des parties A et B prouvent qu'il est légitime de poser pour une fonction f appartenant à $\mathcal{F}$: pour tout $x > 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n [\sqrt[n]{x} - 1]$. Dans cette dernière partie nous allons vérifier, en outre que cette fonction a bien les propriétés retenues des éléments de $\mathcal{F}$. (Certaines propriétés ont déjà été démontrées dans les parties A ou B ; il vous suffit de le faire remarquer).

C1 Pour tout $x > 0$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n [\sqrt[n]{x} - 1]$, démontrer que pour tout couple x, y de réels strictement positifs et pour tout entier relatif p on a :

a) $\frac{x-1}{x} \leq f(x) \leq x - 1$.

b) $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$.

c) $f(xy) = f(x) + f(y)$. (Remarquer que $v_n(xy) = n [(\sqrt[n]{x} - 1) \sqrt[n]{y} + (\sqrt[n]{y} - 1)]$)

d) $f(x^p) = pf(x)$. (On distinguera les 2 cas $p \geq 0$ et $p < 0$)

C2 Pour cette même fonction f , démontrer que

a) f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) pour tout x strictement positif et différent de 1 on a : $|\frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 1| \leq |\frac{1}{x} - 1|$. En déduire que f est dérivable au point 1 et que $f'(1) = 1$.

c) f est dérivable pour tout $x > 0$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$. On pourra utiliser le fait que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $f(x) - f(y) = f(\frac{x}{y})$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$. Pour cela on démontrera successivement que :

1. $f(2) \geq (1/2)$

2. pour tout entier naturel k , si $x > 2^k$, alors $f(x) > \frac{k}{2}$.

On admettra que cette implication prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et l'on procèdera de même pour démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

Conclusion

La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n [\sqrt[n]{x} - 1]$ est la fonction $\ln$, logarithme népérien que vous avez peut-être définie par $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$, ce qui est justifié par la proposition C2 - c).

Fin du Sujet