

Concours Général 97: Epreuve de Mathématiques

Daaramath

Durée: 6 heures

Introduction

L'objet de ce problème est d'étudier la méthode des fractions continues qui permet de trouver de "bonnes" approximations rationnelles d'un irrationnel donné (par exemple, le très célèbre rationnel $\frac{355}{113}$, qui constitue une approximation de π à 3×10^{-7} près).

Notations

Etant donnés $(n+1)$ nombres réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $a_k \in \mathbb{R}^{+*}$ pour $k \geq 1$. On note $[a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$. Autrement dit, on a : $[a_0] = a_0$, et en

posant $f_k(x) = a_k + \frac{1}{x}$ on a : $[a_0, a_1, \dots, a_n] = f_0 \circ f_1 \circ \dots \circ f_{n-1}(a_n)$ pour $n \geq 1$. On remarquera que $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ est bien défini puisque $a_k > 0$ pour $k \geq 1$. On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n \in \mathbb{R}^{+*}$ pour $n \geq 1$. On notera $\mathcal{S}'$ l'ensemble des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_n \in \mathbb{N}^*$ pour $n \geq 1$.

Partie 1 : Généralités sur les fractions continues

Soit $a = (a_n)$ une suite, élément de $\mathcal{S}$. On lui associe les suites $(p_n), (q_n), (r_n)$ définies par : $r_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

$$p_n = \begin{cases} p_0 = 1, p_1 = a_0 \\ p_{n+2} = a_{n+1}p_{n+1} + p_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$q_n = \begin{cases} q_0 = 1, q_1 = 1 \\ q_{n+2} = a_{n+1}q_{n+1} + q_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La suite (r_n) s'appelle la fraction continue associée à la suite (a_n) .

1

-a) - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $[a_0, a_1, \dots, a_n, x] = \frac{p_{n+1}x + p_n}{q_{n+1}x + q_n}$.

-b) - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$

2

-a) - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1} = (-1)^n$

-b) - Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $p_n q_{n+2} - q_n p_{n+2} = (-1)^n a_{n+1}$

3)- Montrer que la suite (r_{2n}) est strictement croissante, que la suite (r_{2n+1}) est strictement décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $r_{2n} < r_{2n+1}$.

4)- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$ on a $|r_n - [a_0, a_1, \dots, a_n, x]| = \frac{1}{q_{n+1}(q_{n+1}x + q_n)}$

Partie 2 : Développement en fraction continue

On reprend les mêmes notations que dans la partie 1. On suppose ici que la suite $a = (a_n)$ est élément de $\mathcal{S}'$, de sorte que les suites $(a_n), (p_n), (q_n)$ sont à valeurs entières et que la suite (r_n) est à valeurs rationnelles.

1)- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, p_n et q_n sont premiers entre eux.

2)-

a)- Montrer que la suite $(q_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante de limite $+\infty$.

b)- Montrer que les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes. On notera $t = t(a)$. leur limite commune.

3)-

a)- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$ on a $|t - r_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}$ et que pour $n \geq 1$ on a : $0 < |q_n t - p_n| < \frac{1}{q_n}$

b)- Montrer que t est irrationnel.

4)- Pour $p \in \mathbb{N}$ fixe, on note t_p la limite de $[a_p, a_{p+1}, \dots, a_n]$ lorsque n tend vers $+\infty$. (Autrement dit, on a $t_p = t(a')$ où la suite $a' = (a'_n)$ est définie à partir de a par décalage des indices : $a'_n = a_{n+p}$). En particulier, on a $t_0 = t$.

a)- Montrer que $t = a_0 + \frac{1}{t_1}$

b)- Montrer que $a_0 < t < a_0 + \frac{1}{a_1}$, et que $a_0 = E(t)$ =partie entière de t .

c)- Montrer que pour $p \in \mathbb{N}$, on a $a_p = E(t_p)$ et $t_{p+1} = \frac{1}{t_p - E(t_p)}$.

5)- Réciproquement, soit u un irrationnel. On cherche s'il existe une suite a élément de $\mathcal{S}'$ telle que $t(a) = u$. D'après la question précédente, la seule suite qui peut convenir est la suivante : on pose $U_0 = u, U_{n+1} = \frac{1}{U_n - E(U_n)}$ et $a_n = E(U_n)$. Reste à savoir si on a bien $t(a) = u$.

a)- Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $u = [a_0, a_1, \dots, a_n, U_{n+1}]$

b)- En déduire une majoration de $|r_n - u|$ (on pourra utiliser la question 1.4) . Montrer que $t(a) = u$. La suite $a = (a_n)$ est alors appelée le développement en fraction continue de u .

Partie 3 : Exemples

1)- Déterminer les 5 premiers termes du développement de π en fraction continue. Expliquer comment on obtient le rationnel mentionné dans l'introduction. Montrer ensuite que les résultats de la partie 1 permettent de retrouver la majoration de l'erreur annoncée.

2)- Soit $a = (a_n)$ une suite élément de $\mathcal{S}'$ et $t = t(a)$. Montrer que si a est périodique de période k , alors $t = [a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, t]$.

3)- Calculer $t(a)$ dans les cas suivants :

a)- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1$

b)- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2$

c)- $\forall n \in \mathbb{N}, a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 2$.

4)- Soit $a = (a_n)$ une suite élément de $\mathcal{S}'$, et $t = t(a)$. On suppose ici que la suite a est périodique.

a)- Montrer que t est solution d'une équation du second degré à coefficients entiers (on dit alors que $t(a)$ est un irrationnel quadratique).

b)- Plus généralement, montrer que si la suite a est périodique à partir d'un certain rang, alors $t(a)$ est un irrationnel quadratique.

5)- Déterminer le développement en fraction continue de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{10}$, puis celui de $\sqrt{1+k^2} (k \in \mathbb{N}^*)$

Partie 4 : Meilleures approximations rationnelles d'un irrationnel

Soit u un irrationnel, (a_n) son développement en fraction continue, et $(p_n), (q_n)$ les suites d'entiers associées (notations du début du problème). On veut montrer que pour $n \geq 2$ on a : $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, q < q_n \Rightarrow |u - \frac{p}{q}| > |u - \frac{p_n}{q_n}|$. (On dit alors que $r_{n+1} = \frac{p_n}{q_n}$ est une meilleure approximation rationnelle de u). On raisonne par contraposé, et on suppose donc $|u - \frac{p}{q}| \leq |u - \frac{p_n}{q_n}|$. Pour fixer les idées, on supposera n pair.

1)- Montrer qu'on a alors $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p}{q} \leq \frac{p_n}{q_n}$.

2)- Ecrire cette double inégalité sous la forme d'un système de deux inéquations lineaires en p et q . Résoudre ensuite un système raisonnable de deux équations linéaires d'inconnues p et q dont les seconds membres seront des paramètres entiers (de signe connu) et conclure.

FIN DU SUJET

BAREME

Partie 1 (4,5 points)

- 1) -a)=1 point
- b)=0,5 point
- 3) =1,25 point
- 4) = 0,75 point

Partie 3 (6 points)

- 1) =1,5 point
- 2) =0,5 point
- 3) -a)=0,5 point
- b)= 0,5 point
- c)=0,5 point
- 4) -a)=0,5 point
- b)=0,5 point
- 5) =1,5 point

Partie 2(07 points)

- 1) =0,5 point
- 2) -a)=0,5 point
- b)=0,5 point
- 3) -a)=0,5 point
- b)=0,75 point
- 4) -a)= 0,5 point
- b)= 0,75 point
- c)= 0,75 point
- 5) -a)= 0,75 point
- b)= 0,75 point

Partie 4(2,5 points)

- 1) 1 point
- 2) 1,5 point